Repérage dans le plan

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

- Déterminer les coordonnées d'un point dans un repère quelconque.
- Calculer les coordonnées du milieu de deux points.
- Calculer la distance entre deux points du plan dans un repère orthonormé.

Mots – clefs :

Repère - Orthogonal - Orthonormal - Abscisses - Ordonnées - Coordonnées - Milie d'un segment - Distance entre deux points - Alignement

Prérequis :

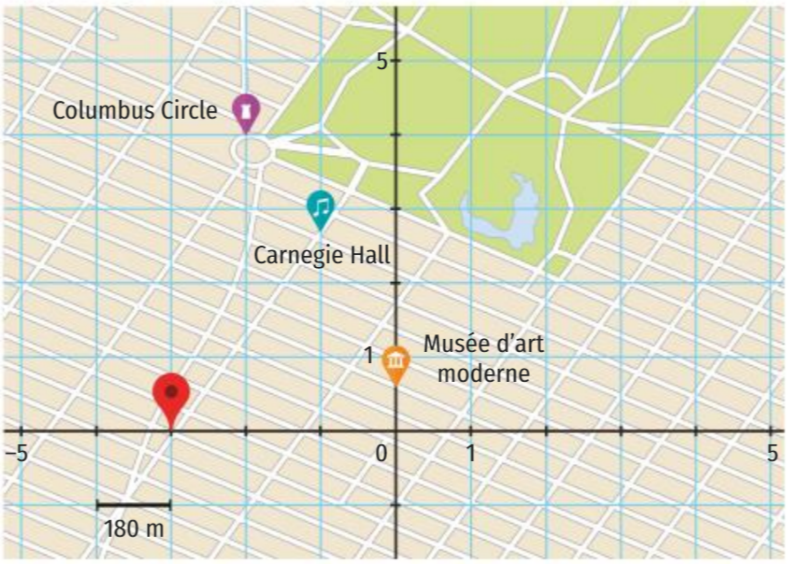
Plan - Point - Segment - Racine carrée - Symétrie axiale - Théorème de Pythagore

𝄞 *La musique du chapitre : Rammstein - Ich Will. Album : Mutter - Date de sortie : 2001.*

Nous avons vu précédemment comment, grâce aux nombres réels, repérer exactement la position d'un point sur une droite. Nous allons maintenant voir comment repérer exactement la position d'un point du plan.

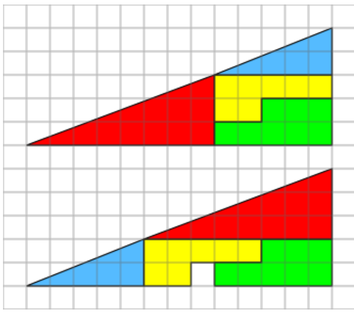
Sur la droite réelle (ou droite numérique), un seule nombre suffisait pour placer un point ; dans le plan, il en faudra deux : l'*abscisse* et l'*ordonnée*. Ils formeront ce que l'on appellera les *coordonnées*. Mais pour bien faire les choses, on va devoir "fixer un cadre" : un *repère*. On va voir, qu'avec un peu d'imagination, on peut toujours poser un repère, même s'il est un peu "tordu"...

Par la suite, on va pouvoir, à partir de deux points A et B, trouver le milieu du segment $[AB]$ mais également calculer la longueur de ce segment. Imaginons qu'une famille de touristes visite New-York et se trouve au niveau du point rouge indiqué sur la carte ci-dessous. Dans le « quadrillage », une « unité » est égale à 180 mètres.



La famille souhaite se rendre à la salle de concert Carnegie Hall puis au musée d'art moderne en suivant les rues. En utilisant le quadrillage et l'échelle indiquée, on pourra donner une estimation de la distance parcourue en mètres !

La dernière chose sur laquelle nous allons travailler, c'est l'alignement de trois points. Les problèmes d'alignement sont plein d'étrangetés et nous rappellent que nous ne pouvons pas nous fier à notre intuition ou notre "vue". Le paradoxe du carré manquant en est un bel exemple ! Ce paradoxe est une "apparente démonstration géométrique" d'un résultat impossible, reposant sur une illusion d'optique. Voir la figure ci-contre.



> *« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »*
>
> Francis Bacon

---

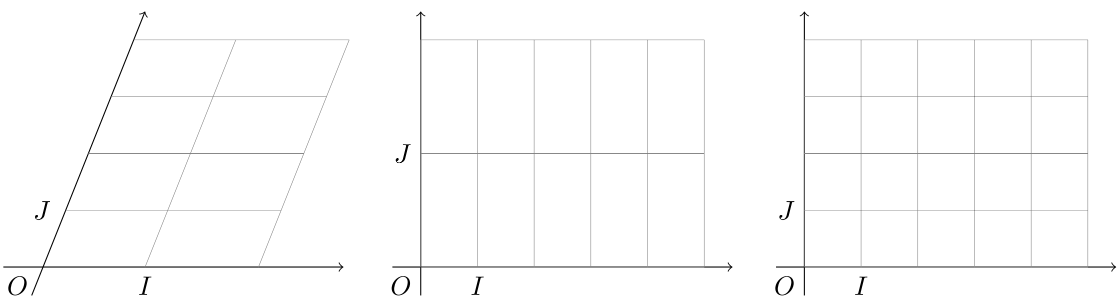
1 Coordonnées d'un point dans le plan

1.1 Repères du plan

Définition 1 *Soient O, I et J trois points du plan. On dit que le triplet* $(O; I, J)$ **forme un repère du plan** *lorsque les points O, I et J ne sont pas alignés. Dans ce cas :*

- *Le point O est l'***origine** *du repère*
- *la droite orientée (OI) est l'***axe des abscisses** *et la distance OI donne l'unité de cet axe.*
- *la droite orientée (OJ) est l'***axe des ordonnées** *et la distance OJ donne l'unité de cet axe.*

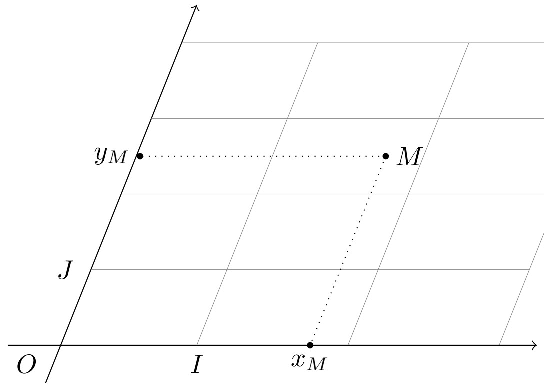
- *Si la droite (OI) est perpendiculaire à (OJ), le repère est dit* **orthogonal**.
- *Si de plus, $OI = OJ$, le repère est dit* **orthonormal** *(ou* **orthonormé***).*



Repère quelconque *Repère orthogonal* *Repère orthonormal*

Définition 2 *On considère un point M du plan muni d'un repère $(O; I, J)$. On construit M_1 le projeté de M parallèlement à l'axe des ordonnées sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'intersection de l'axe des abscisses et de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M. On note x_M l'abscisse de M_1 sur (OI).*
On note M_2 le projeté de M parallèlement à l'axe des abscisses sur l'axe des ordonnées. On note y_M l'abscisse de M_2 sur (OJ).

On appelle **coordonnées (cartésiennes) de M dans $(O; I, J)$** *le couple de nombres $(x_M; y_M)$. Par convention, on appelle x_M l'***abscisse de M** *et y_M l'***ordonnée de M** *dans le repère $(O; I, J)$.*



Un peu d'histoire

Le mot *cartésien* vient du mathématicien et philosophe français René Descartes, né le 31 mars 1596 à La Haye-en-Touraine (aujourd'hui Descartes - oui oui, ils ont rebaptisé la ville en son nom !) et mort le 11 février 1650 à Stockholm.
L'introduction des coordonnées cartésiennes est faite dans le livre premier de la géométrie de René Descartes comme un outil afin de résoudre le problème de Pappus d'Alexandrie (un des plus importants mathématiciens de la Grèce antique dont on parlera plus tard). Il montre en fait dans ce livre, comment résoudre un problèmes géométrique par un calcul algébrique, participant à la naissance de la géométrie analytique.

Remarque

Dans un repère $(O; I, J)$ (et donc quelque soit le repère !), les coordonnées de O, I et J sont respectivement $(0; 0)$, $(1; 0)$ et $(0; 1)$.

Geogebra

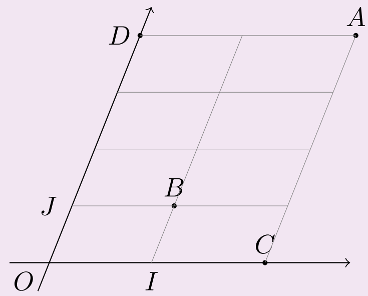
Dans ce chapitre, et dans tous les chapitres de géométrie, *Geogebra est ton ami*[1].

[1] *Google est ton ami.* (Argot Internet) Réponse lapidaire donnée à une question sans réponse évidente, ou qui pourrait aisément recevoir une réponse en utilisant un moteur de recherche, dont Google est l'archétype.

Exemple

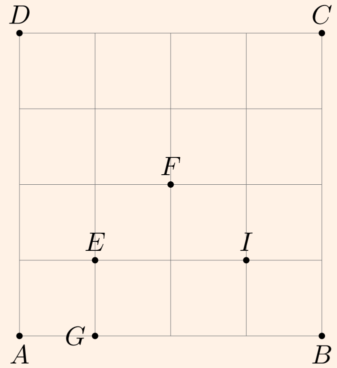
Dans le repère ci-dessous, on trouve les coordonées suivantes :

$$O\ (0; 0) \quad ; \quad I\ (1; 0) \quad ; \quad J\ (0; 1) \quad ; \quad A\ (2; 4) \quad ; \quad B\ (1; 1) \quad ; \quad C\ (2; 0) \quad ; \quad D\ (0; 4)$$



Exercice

On considère la figure ci-contre.
1. Citer un repère orthogonal, un repère orthonormal, et un repère ni orthogonal, ni orthonormal.
2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans les différents repères suivants :
a. $(A; B, D)$
b. $(E; I, G)$
c. $(F; E, I)$



1.2 Coordonnées du milieu d'un segment

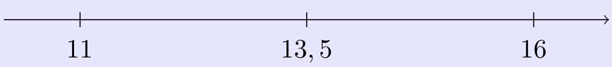
Proposition 3 (admise) *Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.*
Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Remarque
Retenez quelque chose de tout bête concernant cette formule : il faut faire l'analogie entre « milieu » et « moyenne ».
En effet, les coordonnées du milieu d'un segment n'est rien d'autre que la moyenne des coordonnées des extrémités du segment.
Par exemple, si vous avez les deux notes 11 et 16 (avec même coefficient...), alors la moyenne de ces deux notes est

$$\frac{11 + 16}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$$

Vous venez tout simplement de trouver le milieu suivant :



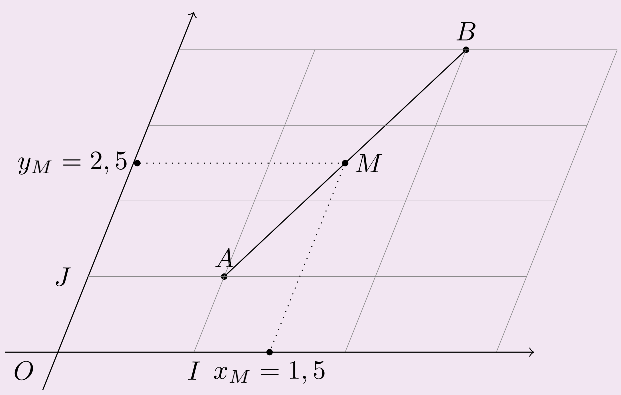
Exemple

Dans le repère ci-dessous, on trouve les coordonées suivantes :

$$O\ (0;0)\quad;\quad I\ (1;0)\quad;\quad J\ (0;1)\quad;\quad A\ (1;1)\quad;\quad B\ (2;4)$$

On va calculer les coordonnées du milieu M de $[AB]$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$



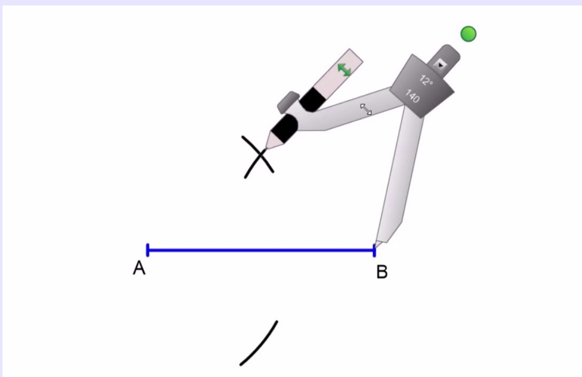
Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(1,5;2,5)$.

Fin 07/10 $2^{\text{nde}}14$

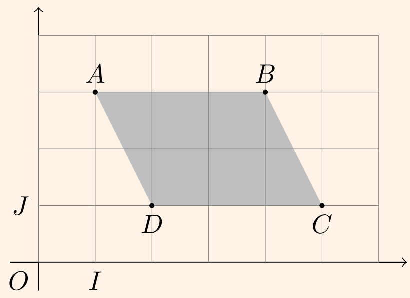
Fin 08/10 $2^{\text{nde}}6$

Construction du milieu d'un segment

Il est peut-être utile de se remémorer comment on construit à la règle (non graduée) et au compas le milieu d'un segment ! La vidéo suivante, de Sophie Chretinat, nous explique comment faire :



Exercice



On considère la figure ci-contre.
1. Calculer les coordonnées de M milieu de $[AC]$
2. Calculer les coordonnées de N milieu de $[BD]$.
3. En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice

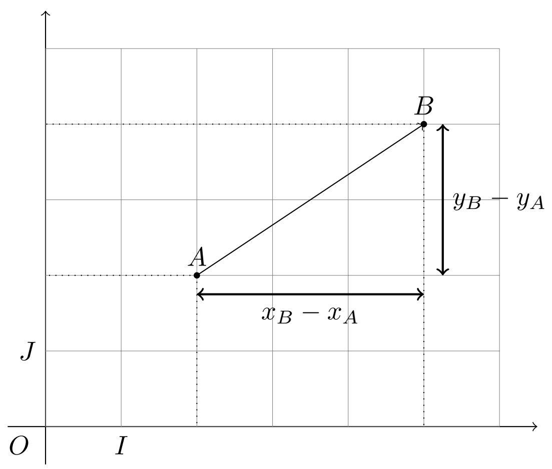
Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé. On considère les points $A(2, 3)$ et $K(4, -3)$.
Trouver les coordonnées du symétrique de A par rapport à K. On notera B ce point.

2 Distance dans un repère orthonormé

2.1 Distance entre deux points

Proposition 4 *Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ est donnée par*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Démonstration

Pour cette démonstration, on va faire appel à un bon vieil ami : Pythagore. En effet, si on regarde la figure précédente, on peut voir un triangle se dessiner ... De plus, l'élève averti aura remarqué que dans la racine il y a une somme de deux carrés (comme dans le théorème de Pythagore). Allons-y !

On traite le cas où $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. (Les autres cas se traitent de la même manière)
Considérons le point C de coordonnées $(x_B ; y_A)$ (voir figure).
Comme les axes sont perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en C. Donc d'après le théorème de Pythagore, on a

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad (\dagger)$$

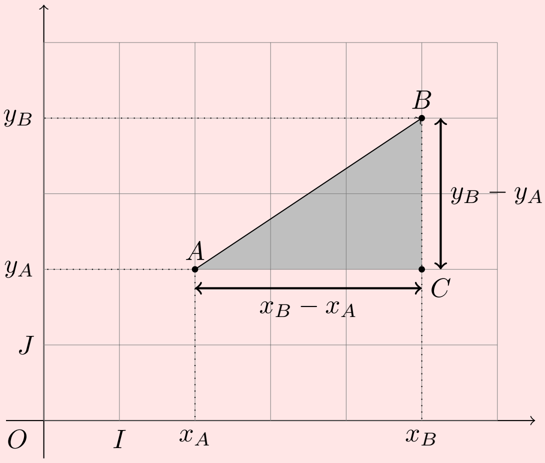
Or,

$$\begin{aligned} AC &= x_C - x_A = x_B - x_A \\ BC &= y_C - y_B = y_A - y_B \end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation ($\dagger$), on a

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Comme AB est un longueur, AB est donc positif (on peut ainsi passer à la racine carrée). Ainsi,



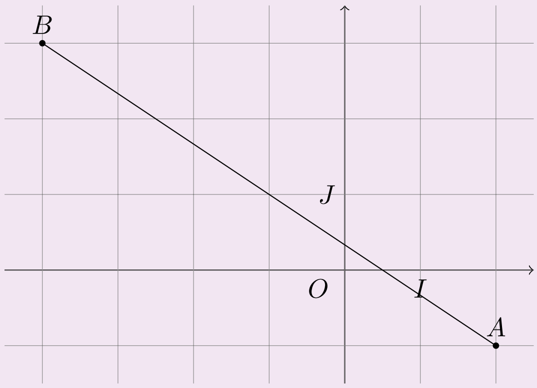
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

□

Exemple

Dans un repère orthonormé, avec $A(2 ; -1)$ et $B(-4 ; 3)$, on a

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-4-2)^2 + (3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{36 + 16} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$



Attention !
Dans l'exemple précédent, et dans la plupart des cas, la distance que vous trouvez n'est pas nécessairement centimètres ! Donc inutile de mesurer le segment pour vérifier votre résultat !
En revanche, si vous voulez pouvoir vérifier vos résultats en utilisant directement votre règle graduée, vous devez impérativement prendre 1cm comme unité de votre repère (c'est-à-dire $OI = OJ = 1$cm).

Fin 08/10 $2^{\text{nde}}14$

Fin 08/10 $2^{\text{nde}}6$

Algorithme

```
from math import*
# pour avoir la fonction sqrt()
def distance(x1,y1,x2,y2):
    return sqrt((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)
```

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1cm. On considère trois points de plan

$$A(-5;2) \quad , \quad B(4;-1) \quad \text{et} \quad C(-2;5)$$

1. Placer les points A, B et C dans le repère $(O; I, J)$.
2. Calculer les distances AB, BC et AC.
3. En déduire la nature du triangle ABC. Justifier.

2.2 Alignement de trois points

Proposition 5 (admise) *Soient A, B et C trois plans distincts du plan. Les points A, B et C sont alignés* **dans cet ordre** *si et seulement si $AC = AB + BC$*

Remarque

Retenez que si l'on a $AC = AB + BC$, alors les points A, B et C sont alignés dans cet ordre. C'est l'ordre d'apparition des trois lettres dans le membre de droite de l'égalité précédente

$$\underbrace{A}_{1}\underbrace{B + B}_{2}\underbrace{C}_{3}$$

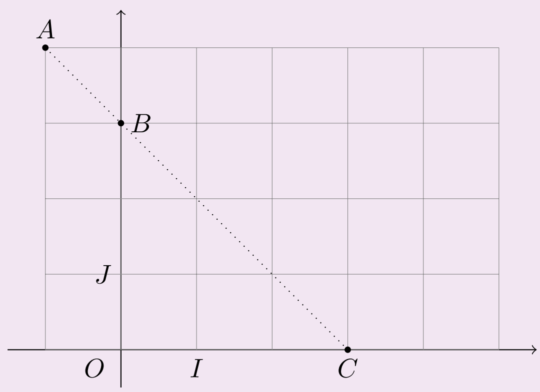
Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On considère les points $A(-1;4)$, $B(0;3)$ et $C(3;0)$.

Le repère étant orthonormé, on a :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-4)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(0-(-1))^2 + (3-4)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

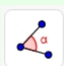


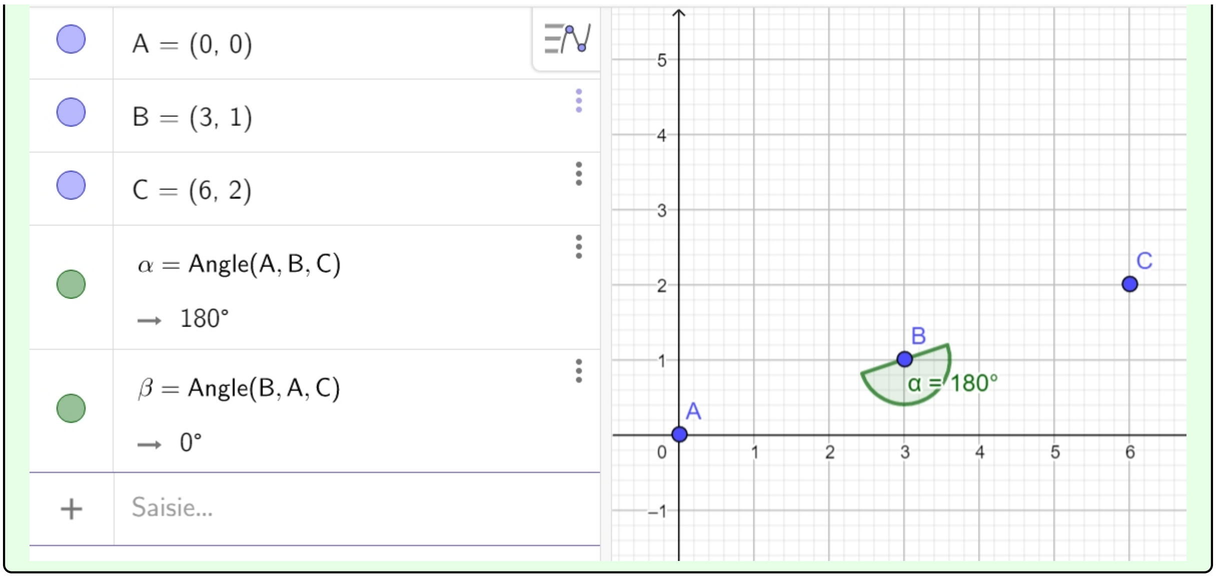
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3-0))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Et donc, on a bien $AB + BC = AC$, et ainsi les points A, B et C sont alignés.

Geogebra

Il est possible d'utiliser Geogebra pour vérifier si trois points sont alignés ou non.
Pour cela, il suffit de se rappeler que lorsque trois points sont alignés, ils forment un angle nul ou de 180°.

Une fois les trois points placés, cliquez sur la touche , puis cliquez sur vos trois points. Si la valeur de l'angle est 0 ou 180, alors vos trois points sont alignés, comme le montre l'exemple suivant :



Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On donne les points : $A(-2; -3)$, $B(1; -1)$ et $C(30; 20)$.

1. Faire un dessin.

2. Les points A,B et C semblent-ils alignés ?

3. Les points A,B et C sont-ils vraiment alignés ?

Algorithme ?

```
from math import*
# pour avoir la fonction sqrt()
def distance(xA,yA,xB,yB):
    return sqrt(xB-xA)^2+(yB-yA)^2)

def alignement(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
    d1=distance(xA,yA,xB,yB)
    d2=distance(xA,yA,xC,yC)
    d3=distance(xC,yC,xB,yB)
    if d1+d2=d3:
        return True
    else:
        return False
```

1. Tester l'algorithme avec les points $A(-1; -1)$, $B(1; 0)$ et $C(5; 2)$.

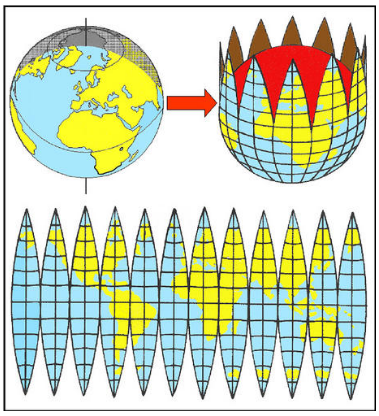
2. On considère les points $A(2; 2)$, $B(5; 2)$ et $C(3; 2)$.

a. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

b. Appliquer l'algorithme avec ces points ? Que renvoie-t-il ? Expliquer pourquoi.

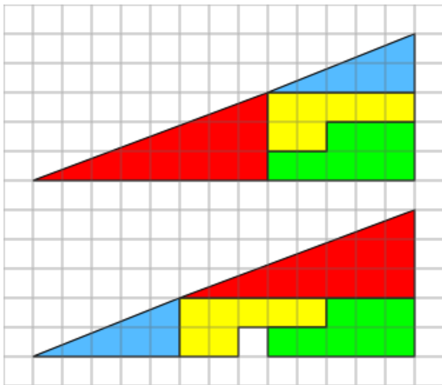
3 Ouverture

Dans ce chapitre, on a vu comment repérer des points et calculer des distances dans un plan. Mais que se passe-t-il si l'on veut regarder les choses dans l'espace ? Ou plutôt est-il possible de calculer des distances dans l'espace à partir d'un plan ?
La question peut paraître bizarre, voire absurde et pourtant c'est quelque chose que l'on connaît depuis tout petit. Un bel exemple est le planisphère terreste. En effet, il faut tout de même se poser la question "Comment fichtre a-t-on pu réussir à faire tenir une sphère dans une feuille ?" Et bien on a "triché"... Si on pouvait découper le globe terrestre pour le mettre à plat, des espaces apparaîtraient et il faudrait les combler. C'est ce qu'on a fait en déformant les continents...

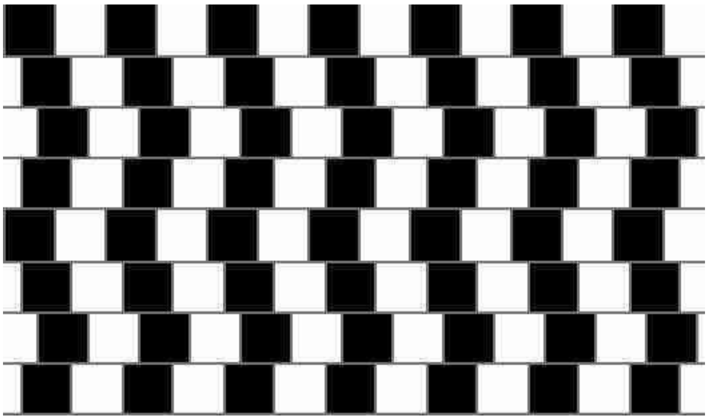


Du coup, cette "déformation" créé de réels problèmes (notamment en navigation marine ou en aviation). Par exemple, comme le montre l'illustration ci-contre, la distance la plus courte entre Paris New-York est la courbe rouge et non la ligne droite bleue ...
Et un des autres problèmes de la déformation de ces continents est la surprise que l'on a en découvrant la vraie taille des continents ... Regardez par exemple la vraie taille de l'Afrique par rapport aux autres continents

Question ouverte : Trouvez une explication au paradoxe du carré manquant.



Culture scientifique : Les illusions d'optique sont fascinantes ! Elles nous rappellent que notre vue peut nous jouer des tours ! Par exemple, l'illusion du mur du café fut décrite la première fois par le Docteur Richard Gregory. Il a observé ce curieux effet dans les carreaux de faïence du mur extérieur d'un café de Bristol. Cette illusion d'optique fait apparaître ces droites parallèles comme des courbes.



Fin 15/10 $2^{\text{nde}}14$

Fin 15/10 $2^{\text{nde}}6$