Calvaire n°2 - Correction

08/11/2019

« Ce ne sont pas nos aptitudes qui montrent ce que nous sommes. Ce sont nos choix. »

Albus (Perceval Wulfric Brian) Dumbledore, Harry Potter et la chambre des secrets, 2002.

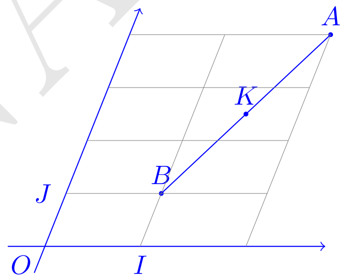
Partie 1 - Milieu d'un segment

Exercice 1 ☆

1.a. Le repère ci-dessous est-il orthonormé ? Orthogonal ? Le repère ci-dessous est quelconque.
b. Calculer les coordoonées de K, milieu du segment $[AB]$.

On a $A(2;4)$ et $B(1;1)$ et ainsi.

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$
$$x_K = \frac{1+3}{2} \qquad y_K = \frac{1+4}{2}$$
$$x_K = \frac{4}{2} = 2 \qquad y_K = \frac{5}{2} = 2,5$$



Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont $K(2;2,5)$

2. Le point $M(1;3)$ est-il le milieu du segment $[CD]$, où $C(-1;4)$ et $D(3;2)$.
Notons L le milieu du segment $[CD]$, et calculons ses coordonnées.

$$x_L = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad y_L = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

On remarque que les points L et M ont les mêmes coordonnées. Ce sont donc les mêmes points, et ainsi M est bien le milieu du segment $[CD]$.

Exercice 2 ☆ ☆

Soit $(O;I,J)$ un repère quelconque, on considère les points $A(2;1)$, $B(5;1)$, $C(5;-2)$ et $D(2;-2)$.
a. Déterminer les coordonnées de K, milieu de $[AC]$.

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Les coordonnées du milieu du segment $[AC]$ sont $K(3,5;-0,5)$

b. Déterminer les coordonnées de L, milieu de $[BD]$.

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{et} \quad y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Les coordonnées du milieu du segment $[BD]$ sont $L(3,5;-0,5)$

c. En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme.

On remarque que les points K et L sont confondus (ils ont les mêmes coordonnées). Ainsi les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 3 ☆ ☆ ☆

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère les points $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$ et $C(2; -3)$.

Un schéma est réalisé à la fin de l'exercice avec tous les points trouvés au cours des questions.

a. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
On sait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Ainsi, on calcule le milieu de $[AC]$, que l'on note K.

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Par ailleurs, on sait que K est aussi le milieu de l'autre diagonale, $[BD]$. On a donc :

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{4 + x_D}{2} \Leftrightarrow 0 \times 2 = \frac{4 + x_D}{2} \times 2 \Leftrightarrow 0 = \frac{4 + x_D}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \Leftrightarrow 0 = 4 + x_D \Leftrightarrow x_D = -4$$

et

$$y_K = \frac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{3 + y_D}{2} \Leftrightarrow -1 \times 2 = \frac{3 + y_D}{2} \times 2 \Leftrightarrow -2 = \frac{3 + y_D}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \Leftrightarrow -2 = 3 + y_D \Leftrightarrow y_D = -5$$

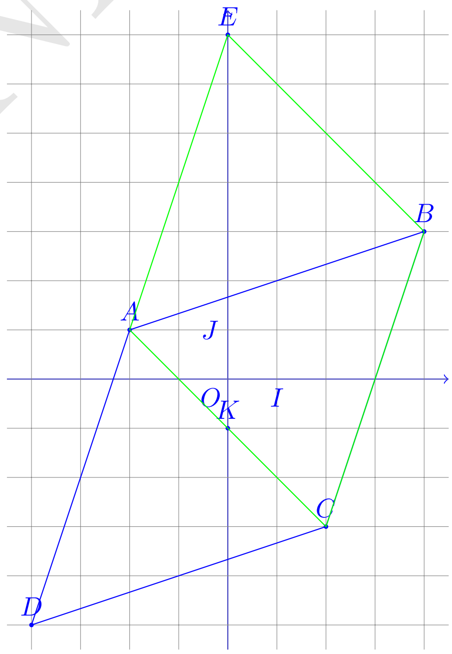
b. Calculer les coordonnées du point E tel que $ACBE$ soit un parallélogramme.
Même raisonnement que le **a.**, et on trouve $E(0; 7)$.

c. Montrer que A est le milieu du segment $[DE]$.
Notons L le milieu du segment $[DE]$, et calculons ses coordonnées.

$$x_L = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{-4+0}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y_L = \frac{y_D + y_E}{2} = \frac{-5+7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

On remarque que les points L et A ont les mêmes coordonnées. Ce sont donc les mêmes points, et ainsi A est bien le milieu du segment $[DE]$.



Partie 2 - Distance entre deux points

Exercice 1 ☆

Soit $(O; I, J)$ un repère orthornormé. Dans chacun des cas, déterminer la distance AB.
a. $A(1; 1)$ et $B(4; 5)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

b. $A(5; \frac{1}{2})$ et $B(3; -\frac{1}{3})$

$$\begin{aligned} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} &= \sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{1\times 2}{3\times 2} - \frac{1\times 3}{2\times 3}\right)^2} \\ &= \sqrt{4 + \left(-\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{4 + \left(\frac{-2-3}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{4 + \left(\frac{-5}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4\times 36}{1\times 36} + \frac{25}{36}} \\ &= \sqrt{\frac{144}{36} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{36}} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Exercice 2 ☆☆

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I, J)$, on considère trois points $A(-3; 3)$, $B(2; 4)$ et $C(1; -4)$.

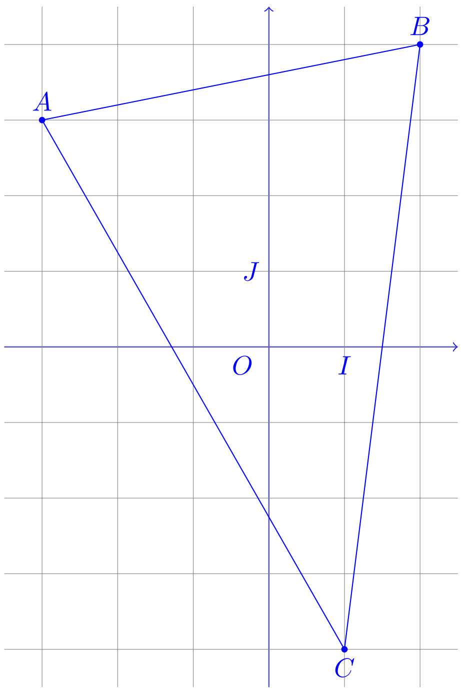
a. Conjecturer la nature du triangle ABC
Le triangle ABC semble isocèle en C.

b. Démontrer cette conjecture.
Pour démontrer cette conjecture, il nous suffit de montrer que $AC = BC$. Allons-y !

$$\begin{aligned} AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} &= \sqrt{(1-(-3))^2 + (-4-3)^2} \\ &= \sqrt{(1+3)^2 + (-7)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} &= \sqrt{(1-2)^2 + (-4-4)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65} \end{aligned}$$

On remarque donc que $AC = BC$, et ainsi le triangle ABC est bien isocèle en C.

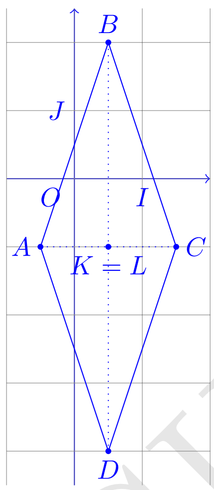


Exercice 3 ☆☆☆

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère les points $A(-\frac{1}{2}; -1)$, $B(\frac{1}{2}; 2)$, $C(\frac{3}{2}; -1)$ et $D(\frac{1}{2}; -4)$.

a. Conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$

Le quadrilatère $ABCD$ semble être un losange.



b. Démontrer cette conjecture.

Pour démontrer cette conjecture, on peut utiliser une des deux propositions suivantes :

« Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange. »

« Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange. »

Selon moi, le plus simple est d'utiliser la deuxième proposition : on démontre que c'est un parallélogramme en calculant deux milieux, puis que c'est un losange en calculant deux longueurs. Allons-y !

• <u>Montrons d'abord que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme :</u>

Soit K le milieu du segment $[AC]$ et L le milieu du segment $[BD]$

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{-1+3}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + (-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1+1}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Les coordonnées du milieu du segment $[AC]$ sont $K(0,5;-1)$ et les coordonnées du milieu du segment $[BD]$ sont $L(0,5;-1)$. On remarque que les points K et L sont confondus (ils ont les mêmes coordonnées). Ainsi les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

• <u>Montrons enfin que le parallélogramme $ABCD$ est un losange :</u>

Pour ce faire, on va montrer que $AB = AD$.

$$\begin{aligned} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (2 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (-4 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

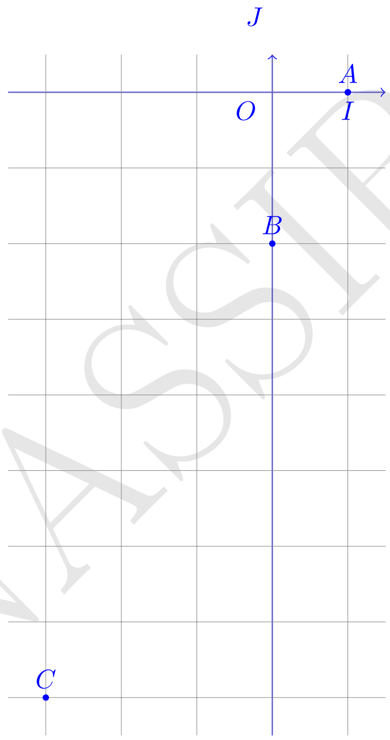
On a donc bien $AB = AD$. Par conséquent, le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Partie 3 - Alignement de trois points

Exercice 1 ☆

Soit $(O; I, J)$ un repère orthornormé. On considère les points suivants : $A(1; 0)$, $B(0; -2)$, et $C(-3; -8)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

Un dessin est primordial pour savoir dans quel "ordre" les points sont alignés. On remarque que pour montrer que les points A, B, et C sont alignés (ce n'est qu'une supposition !), nous devons montrer que $AC = AB + BC$. Allons-y !



$$\begin{aligned} AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} &= \sqrt{(-3-1)^2 + (-8-0)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{16 + 64} \\ &= \sqrt{80} \\ &= \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} &= \sqrt{(-3-0)^2 + (-8-(-2))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-8+2)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{9 + 36} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

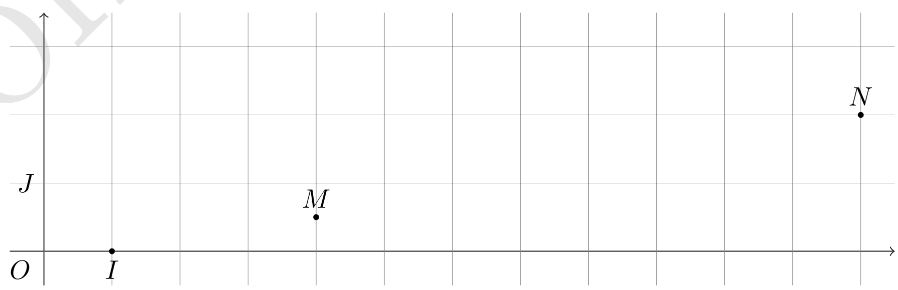
On a donc

$$AB + BC = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5} = AC$$

Par conséquent, les points A, B, et C sont alignés.

Exercice 2 ☆ ☆

Les points I, M et N sont-ils alignés ? Justifier. *Précision :* L'ordonnée de M vaut $0,5$.



On commence par lire les coordonnées des points I, M et N. On a donc $I(1; 0)$, $M(4; 0,5)$ et $N(12; 2)$.
Pour montrer que les points I, M et N sont alignés (ce n'est qu'une supposition !) dans cet ordre, il faut montrer que $IN = IM + MN$. Allons-y !

$$\begin{aligned} IN = \sqrt{(x_N - x_I)^2 + (y_N - y_I)^2} = \sqrt{(12-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{121 + 4} &= \sqrt{125} \\ &= \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$IM = \sqrt{(x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9 \times 4}{1 \times 4} + \frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{36+1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(12-4)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{64 + \frac{9}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{64 \times 4}{1 \times 4} + \frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{256}{4} + \frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{256+1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{257}{4}} = \frac{\sqrt{257}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{257}}{2}$$

On a d'une part,

$$IN = 5\sqrt{5} \simeq 11.1803398875$$

et d'autre part,

$$IM + MN = \frac{\sqrt{37}}{2} + \frac{\sqrt{257}}{2} \simeq 11.0569910361$$

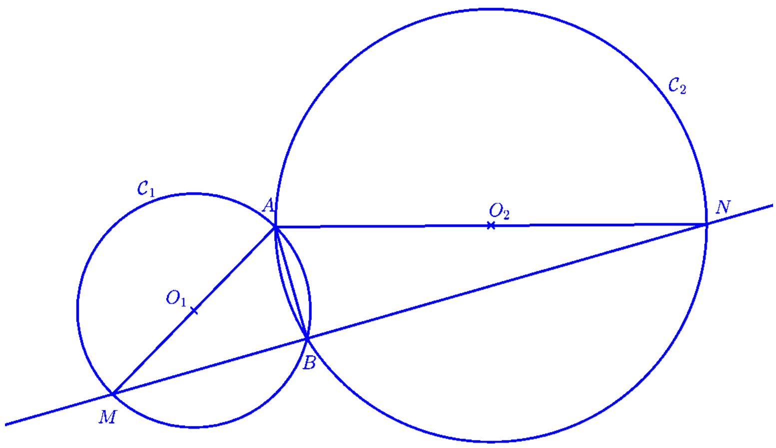
Par conséquent, $IN \neq IM + MN$, et donc les points I, M et N ne sont pas alignés.

On aurait pu s'arrêter un peu plutôt... Il suffit de remarquer que les nombres 5, 37 et 257 sont premiers et donc il est impossible de simplifier les expressions...

Exercice 3

On considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de rayons différents sécants en deux points A et B.
Les points M et N sont tels que $[AM]$ et $[AN]$ soient des diamètres respectifs de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Démontrer que les points M, B et N sont alignés.

Un dessin est bien évidemment indispensable ici !



Pour montrer que les points M, B et N sont alignés, nous allons montrer que l'angle formé par ces trois vaut 180ř, c'est-à-dire que $\widehat{MBN} = 180°$. Pour cela, nous allons utiliser ici la proposition suivante

> « Si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle. »

Dans le cercle $\mathcal{C}_1$, $[AM]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABM. Donc le triangle ABM est rectangle en B, et ainsi $\widehat{MBA} = 90°$.
De même, dans le cercle $\mathcal{C}_2$, $[AN]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABN. Donc le triangle ABN est rectangle en B, et ainsi $\widehat{ABN} = 90°$.
Par conséquent,

$$\widehat{MBN} = \widehat{MBA} + \widehat{ABN} = 90° + 90° = 180°$$

Donc les points M, B et N sont alignés.

Partie 4 - Algorithmique en Python

Exercice 1

On considère le programme écrit en Python ci-après. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

```python
def middle(xA,yA,xB,yB):
    xK=(xA+xB)/2
    yK=(yA+yB)/2
    return (xK,yK)
```

1. Tester l'algorithme avec les points $A(1;1)$ et $B(2;4)$.

```
>>> middle(1,1,2,4)
(1.5, 2.5)
```

2. Quel est le rôle de ce programme ?
Ce programme permet de trouver le milieu d'un segment en saisissant les coordonnées de ses extrémités.

Exercice 2

On considère le programme écrit en Python ci-après. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

```python
def mystere(xA,yA):
    xN=-1*xA
    yN=yA
    return (xN,yN)
```

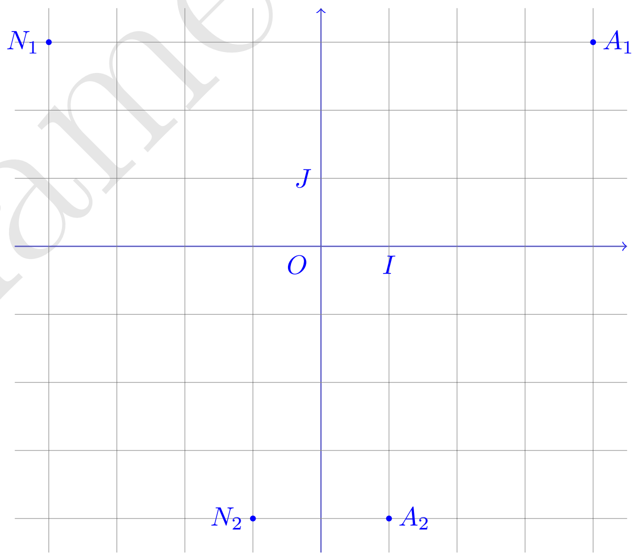
1. Tester l'algorithme avec les points $A_1(4;3)$ et $A_2(-1;-4)$ et placer les points N_1 et N_2 correspondants dans le repère.

```
>>> mystere(4,3)
(-4,3)
```

On a donc $N_1(-4;3)$

```
>>> mystere(-1,-4)
(1,-4)
```

On a donc $N_2(1;-4)$



2. Quel est le rôle de ce programme ?
Ce programme nous permet de trouver les coordonnées du symétrique d'un point par rapport à l'axe des ordonnées en saisissant ses coordonnées.

Exercice 3

On considère le programme écrit en Python ci-après. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

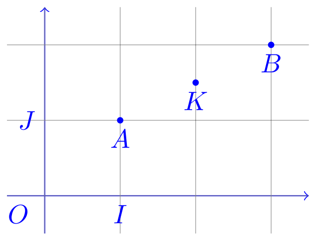
```python
def safaikoi(xA,yA,xK,yK):
    xB=2*xK-xA
    yB=2*yK-yA
    return (xB,yB)
```

1. Tester l'algorithme avec les points :

a. $A(1;1)$ et $K(2;1,5)$.

```python
>>> safaikoi(1,1,2,1.5)
(3, 2.0)
```

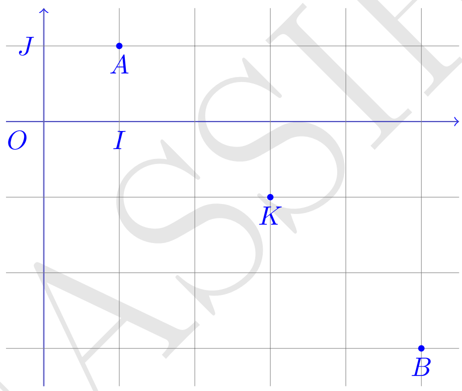
On a donc $B(-3;2)$



b. $A(1;1)$ et $K(3;-1)$

```python
>>> safaikoi(1,1,3,-1)
(5, -3)
```

On a donc $B(5;-3)$



2. Quel est le rôle de ce programme ?
Ce programme permet de trouver le symétrique du point A par rapport au point K en saisissant leurs coordonnées.