# Corvée n°3 - Correction

A rendre le : 04/11/2019

*« Il y a une différence entre connaître le chemin et arpenter le chemin. »*

Morpheus, Matrix, 1999

---

**Hors-d'œuvre indispensable**

**1.** Ecrire sous la forme $\sqrt{a}$ où $a$ est un réel positif :

**a.** $\sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

**b.** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$

**c.** $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$

**d.** $\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

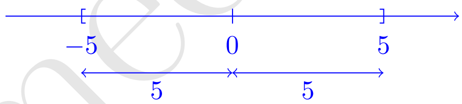
**2.** Pour les intervalles $I$ suivants, traduire le fait que $x$ appartient à $I$ par une inégalité du type $|x - a| \leq r$ :

**a.** $I = [-5; 5]$

L'intervalle $[-5; 5]$ a pour longueur $5 - (-5) = 5 + 5 = 10$ donc son rayon est $\frac{10}{2} = 5$.

Son centre $-5 + 5 = 0$ ou encore $\frac{-5+5}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

Dire que $x$ appartient à l'intervalle $[-5; 5]$ revient donc à dire que la distance de $x$ au centre $0$ de l'intervalle est inférieure ou égale à $5$, c'est-à-dire $|x - 0| \leq 5$, ou encore $|x| \leq 5$.

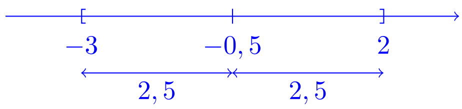



**b.** $I = [-3; 2]$

L'intervalle $[-3; 2]$ a pour longueur $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ donc son rayon est $\frac{5}{2} = 2,5$.

Son centre $-3 + 2,5 = -0,5$ ou encore $\frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2} = 0,5$.

Dire que $x$ appartient à l'intervalle $[-3; 2]$ revient donc à dire que la distance de $x$ au centre $0,5$ de l'intervalle est inférieure ou égale à $2,5$, c'est-à-dire $|x - 0,5| \leq 2,5$.




Mohamed NASSIRI

**Hors-d'œuvre indispensable (suite)**

**c.** $I = \left[\frac{1}{7};\frac{1}{5}\right]$

L'intervalle $\left[\frac{1}{7};\frac{1}{5}\right]$ a pour longueur $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{1\times7}{5\times7}-\frac{1\times5}{7\times5}=\frac{7}{35}-\frac{5}{35}=\frac{2}{35}$ donc son rayon est

$$\frac{\frac{2}{35}}{2}=\frac{\frac{2}{35}}{\frac{2}{1}}=\frac{2}{35}\times\frac{1}{2}=\frac{2\times1}{2\times35}=\frac{\cancel{2\times}1}{\cancel{2\times}\times35}=\frac{1}{35}$$

.

Son centre

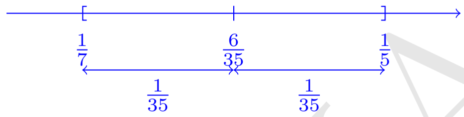
$$\frac{1}{7}+\frac{1}{35}=\frac{1\times5}{7\times5}+\frac{1}{35}=\frac{5+1}{35}=\frac{6}{35}$$

ou encore

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{2}=\frac{\frac{7}{35}+\frac{5}{35}}{2}=\frac{\frac{7+5}{35}}{2}=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{2}{1}}=\frac{12}{35}\times\frac{1}{2}=\frac{12\times1}{35\times2}=\frac{6\times2\times1}{35\times2}+\frac{6\cancel{\times2}\times1}{35\cancel{\times2}}=\frac{6}{35}$$

.

Dire que $x$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{7};\frac{1}{5}\right]$ revient donc à dire que la distance de $x$ au centre $\frac{6}{35}$ de l'intervalle est inférieure ou égale à $\frac{1}{35}$, c'est-à-dire $|x-\frac{6}{35}|\leq\frac{1}{35}$.

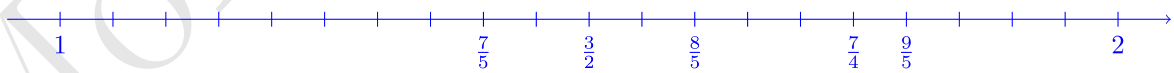



**3.** Sur la droite numérique ci-dessous, placer les nombres suivants :

$$\frac{7}{5}\ ;\ \frac{7}{4}\ ;\ \frac{8}{5}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{5}$$

Alors la première chose à remarquer ici, c'est le fait que la droite numérique a été découpé en 20 morceaux. Ainsi, chaque morceau correspond à $\frac{1}{20}$. Par conséquent, pour placer tous les nombres, le plus simple est donc de faire apparaître 20 au dénominateur de tous les nombres, puis de l'écrire $1+\frac{a}{20}$ où $a$ est à déterminer. Allons-y !

$$\frac{7}{5}=\frac{7\times4}{5\times4}=\frac{28}{20}=\frac{20+8}{20}=\frac{20}{20}+\frac{8}{20}=1+\frac{8}{20}$$
$$\frac{7}{4}=\frac{7\times5}{4\times5}=\frac{35}{20}=\frac{20+15}{20}=\frac{20}{20}+\frac{15}{20}=1+\frac{15}{20}$$
$$\frac{8}{5}=\frac{8\times4}{5\times4}=\frac{32}{20}=\frac{20+12}{20}=\frac{20}{20}+\frac{12}{20}=1+\frac{12}{20}$$
$$\frac{3}{2}=\frac{3\times10}{2\times10}=\frac{30}{20}=\frac{20+10}{20}=\frac{20}{20}+\frac{10}{20}=1+\frac{10}{20}\quad\text{(ou remarquer que }\frac{3}{2}=1,5...)$$
$$\frac{9}{5}=\frac{9\times4}{5\times4}=\frac{36}{20}=\frac{20+16}{20}=\frac{20}{20}+\frac{16}{20}=1+\frac{16}{20}$$



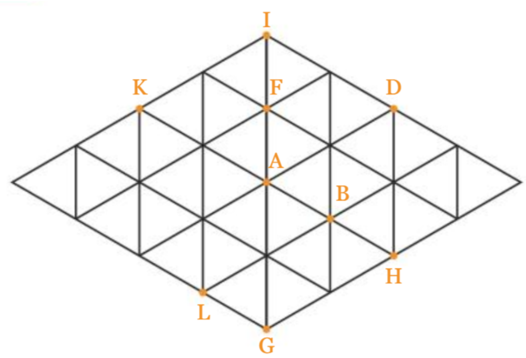

Mohamed NASSIRI

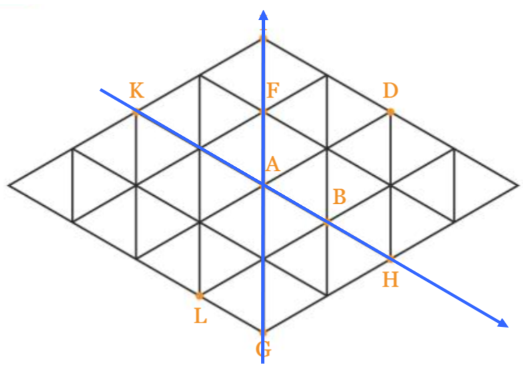
## <u>Exercice 1</u>

On considère la figure ci-contre.

Déterminer les coordonées de tous les points de la figure dans les repères suivants.

**1.** $(A;B,F)$
**2.** $(G;L,H)$



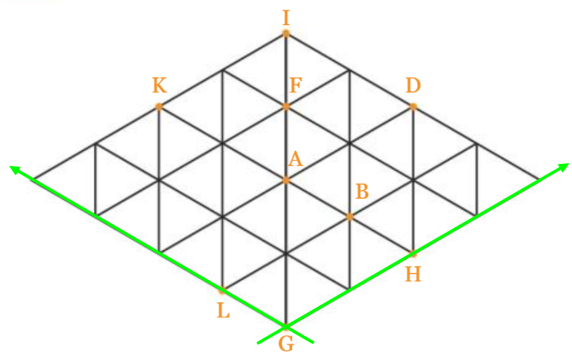



Dans le repère $(A;B,F)$, on a :

$$A(0;0),\ B(1;0),\ F(0;1)$$

$$D(2;2),\ G(0;-2),\ H(2;0)$$

$$I(0;2),\ K(-2;0),\ L(-1;-2)$$




Dans le repère $(G;L,H)$, on a :

$$G(0;0),\ L(1;0),\ H(0;1)$$

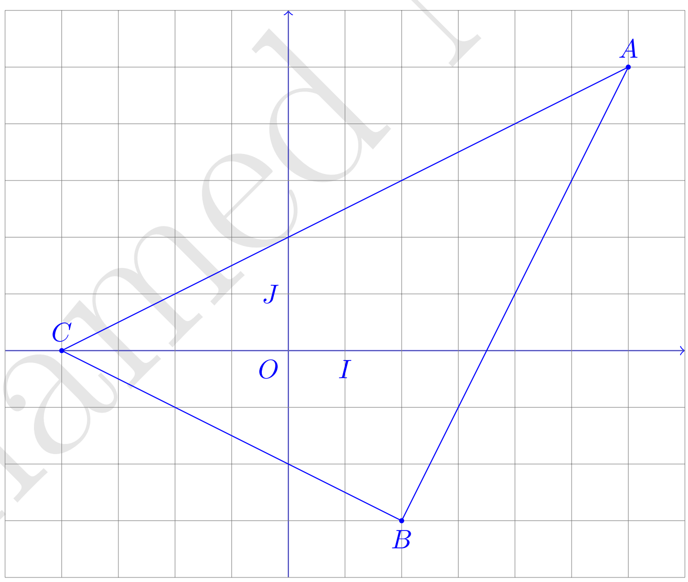
$$A(2;1),\ B(1;1),\ D(2;2)$$

$$I(4;2),\ K(4;1),\ F(3;1,5)$$

**Exercice 2**

On considère les points $A(6;5)$, $B(2;-3)$ et $C(-4;0)$.

Faire un dessin dans un exercice de géométrie peut-être une bonne idée... Même quand celui-ci n'est pas demandé !




Le triangle $ABC$ semble être rectangle en $B$.

**1.** Quel est la nature du triangle $ABC$.

D'après notre conjecture, le triangle $ABC$ semble être rectangle en $B$. Démontrons donc cela. Nous allons devoir utiliser la réciproque du théorème de Pythagore en montrant que $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-4-6)^2 + (0-5)^2} \\ &= \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

Mohamed NASSIRI

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2} \\
&= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} \\
&= \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\
&= \sqrt{(-4-2)^2 + (0-(-3))^2} \\
&= \sqrt{(-6)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Par suite, on a d'une part

$$AC^2 = \sqrt{125}^2 = 125$$

et d'autre part

$$AB^2 + BC^2 = \sqrt{80}^2 + \sqrt{45}^2 = 80 + 45 = 125$$

Ainsi, $AC^2 = BC^2 + AB^2$ et donc, par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $ABC$ est rectangle en $B$.

**2.** Calculer le périmètre et l'aire de ce triangle.

• Pour le calcul du périmètre, aucune difficulté. Appelons $\mathcal{P}_{ABC}$ ce périmètre. On a donc

$$\mathcal{P}_{ABC} = AB + AC + BC = 4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

• Pour le calcul de l'aire, que l'on notera $\mathcal{A}_{ABC}$, il faut se rappeler de la formule

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur (correspondante)}}{2}$$

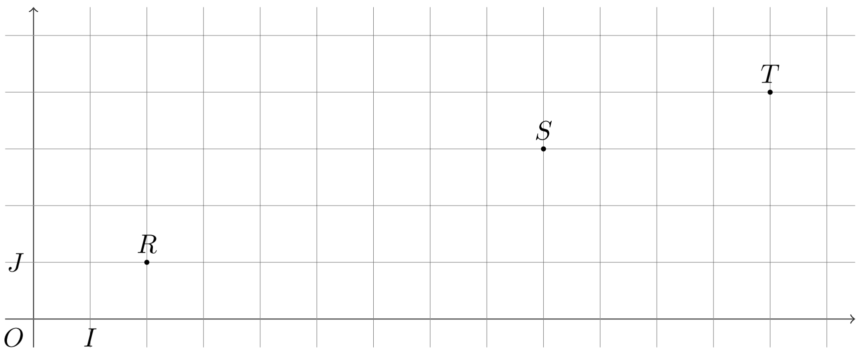
Dans un triangle rectangle, la chose est d'autant plus simple qu'il suffit de prendre les deux côtés perpendiculaires comme "base" et "hauteur". Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{4 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} &= \frac{12 \times \sqrt{5 \times 5}}{2} \\
&= \frac{6 \times 2 \times \sqrt{25}}{2} \\
&= \frac{6 \times \cancel{2} \times 5}{\cancel{2}} \\
&= 6 \times 5 = 30
\end{aligned}
$$

Vous remarquerez que pour les différents calculs, j'ai utilisé les différentes formes possibles des valeurs de $AB$, $AC$ et $BC$. Elles ont été chosies de façon à ce que les calculs soient les plus simples possibles.

**<u>Exercice 3</u>**

Les points $R$, $S$ et $T$ sont-ils alignés ? Justifier.




Mohamed NASSIRI

Les points $R$, $S$ et $T$ semblent alignés. Si tel est le cas, nous allons devoir montrer que $RT = RS + ST$. Voyons ce qu'il en est.

Déterminons les coordonnées des points $R$, $S$ et $T$ : $R(2;1)$, $S(9;3)$ et $T(13;4)$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} RS &= \sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2} \\ &= \sqrt{(9-2)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{49+4} = \sqrt{53} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RT &= \sqrt{(x_T - x_R)^2 + (y_T - y_R)^2} \\ &= \sqrt{(13-2)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{11^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{121+9} = \sqrt{130} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ST &= \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2} \\ &= \sqrt{(13-9)^2 + (4-3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

On a d'une part,

$$RT = \sqrt{130} \simeq 11.401754251$$

et d'autre part,

$$RS + ST = \sqrt{53} + \sqrt{17} \simeq 11.4032155149$$

Par conséquent, $RT \neq RS + ST$, et donc les points $R$, $S$ et $T$ ne sont pas alignés.

## Exercice 4

On considère l'algorithme suivant :

```
from math import*

def distance(xA,yA,xB,yB):
    return sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)

def alignement(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
    d1=distance(xA,yA,xB,yB)
    d2=distance(xA,yA,xC,yC)
    d3=distance(xC,yC,xB,yB)
    if d1+d2==d3:
        return True
    else:
        return False
```

**1.** Tester l'algorithme avec les points $A(-1;-1)$, $B(1;0)$ et $C(5;2)$.

```
>>> alignement(-1,-1,1,0,5,2)
False
```

Pourtant les points $A$, $B$, $C$ sont bien alignés... Déjà, à ce stade, quelque chose doit vous alerter...

**2.** On considère les points $A(2;2)$, $B(5;2)$ et $C(3;2)$.
**a.** Les points $A$, $B$, $C$ sont-ils alignés ?
Oui, les points sont alignés car ils ont tous la même ordonnée !

**b.** Appliquer l'algorithme avec ces points ? Que renvoie-t-il ? Expliquer pourquoi.

```
>>> alignement(2,2,5,2,3,2)
False
```

Cela provient du fait que l'algorithme vérifie uniquement la relation

$$d1 + d2 = d3 \quad \text{qui s'écrit encore} \quad AB + AC = BC$$

Et donc, il vérifie que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés **dans cet ordre.**
Or ici, les points $A$, $C$ et $B$ sont alignés **dans cet ordre** et donc il aurait fallu vérifier la relation :

$$AC + BC = AB$$

Mohamed NASSIRI

Ce que l'algorithme ne fait pas...

**Exercice bonus**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon quelconque. On donne $[AB]$, une corde du cercle qui n'est pas un diamètre. Proposer une méthode de construction permettant de retrouver le centre du cercle.

Pour cet exercice, je vous propose de regarder la courte vidéo très bien faite de Jean-Yves Labouche.

Mohamed NASSIRI