Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Mohamed NASSIRI

On définit les suites de fonctions par analogie aux suites de nombres réels ou complexes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ n &\mapsto u_n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ (ou } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ ou } \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})) \\ n &\mapsto f_n \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour les séries. Cependant, malgré cette analogie simple, on est vite confronté à quelques problèmes concernant la convergence de ces suites :

- La continuité :

$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \underbrace{x^n}_{\text{continue}} = \underbrace{\chi_{\{1\}}(x)}_{\text{pas continue}}$$

- La dérivabilité :

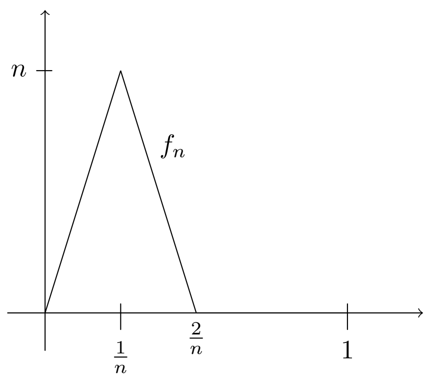
$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin(nx) = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)' = \lim_{n\to+\infty} \cos(nx) = \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

- L'intégrabilité :

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n}_{=1} = 1$$

mais

$$\int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}_{=0} = 0$$



On est donc amené à étudier très soigneusement la convergence de ces suites (et séries) de fonctions et de trouver des conditions pour obtenir des résultats de convergence compatibles avec la régularité et les différentes opérations sur les fonctions (continuité, dérivabilité, intégration, etc.)

Cela nous conduira à définir plusieurs notions de convergence : convergence simple, convergence uniforme, convergence absolue et convergence normale. On a les relations suivantes entre les différents modes de convergence :

$$\boxed{f_n \text{ CVU}} \Longrightarrow \boxed{f_n \text{ CVS}}$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\sum f_n \text{ CVN}} & \Longrightarrow & \boxed{\sum f_n \text{ CVA}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \boxed{\sum f_n \text{ CVU}} & \Longrightarrow & \boxed{\sum f_n \text{ CVS}} \end{array}$$

Les deux théorèmes d'approximation, le théorème de Weierstrass et de Féjer, montre que l'étude des suites et séries de fonctions n'est pas superflue.

Références
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani Mohammed ♠
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon ♠

Développements
Théorème de Weierstrass
Théorème de Féjer
Résolution de l'équation de Bessel

Dans toute la leçon, X désigne un ensemble non vide et E un espace vectoriel muni d'une norme $||.||$.

1 Suites de fonctions

1.1 Convergence simple et convergence uniforme [ELAM] p.139 → 145

Définition 1 *Soient (f_n) une suite d'applications de X dans E et f une application de X dans E. On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si,*

$$(\forall x \in X)(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \Rightarrow (||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon)$$

On dit alors que f est la limite simple sur X de la suite de fonctions (f_n). On note parfois

$$P_n \xrightarrow{CVS} f$$

Exemple 2 *La suite de fonctions définies sur [0,1] par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,1[\\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Définition 3 *Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E et f une application de X dans E. On dit que la suite (f_n) converge unifomément vers f sur X si,*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \Rightarrow (\forall x \in X, ||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon)$$

On dit alors que f est la limite uniforme sur X de la suite de fonctions (f_n). On note parfois

$$P_n \xrightarrow{CVU} f$$

Proposition 4 *Si la suite (f_n) converge uniformément sur X vers f, alors elle converge simplement sur X vers f.*

Proposition 5 *(f_n) converge uniformément sur X vers f si et seulement si*

$$\sup_{x \in X} ||f_n(x) - f(x)|| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemple 6 *La suite de fonctions de l'exemple 2 ne converge pas uniformément vers f car*

$$\sup_{x \in [0,1]} ||x^n - f(x)|| = 1 \cancel{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Théorème 7 *Critère de Cauchy uniforme : Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E. Alors (f_n) converge uniformément si :*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, p \geq N) \Rightarrow (\forall x \in X,\ ||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon)$$

Définition 8 *On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E muni de la norme de la convergence uniforme $||f||_\infty = \sup_{x \in X} ||f(x)||$.*

Proposition 9 *Une suite (f_n) de $\mathcal{B}(X,E)$ converge uniformément sur X vers $f \in \mathcal{B}(X,E)$ si et seulement si $||f_n - f||_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Théorème 10 *$(\mathcal{B}(X,E), ||.||_\infty)$ est complet dès que E l'est.*

1.2 Convergence uniforme, continuité et dérivabilité [ELAM] p.145 → 151

Théorème 11 *Soient E un espace vectoriel normé et X un partie non vide d'un espace vectoriel de dimension finie F et (f_n) une suite uniformément convergente d'applications continues. Alors leur limite f est continue.*

Exemple 12 *La suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-nx}$ converge simplement vers la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Les f_n sont continues mais pas leur limite f, donc la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 13 *Théorème de la double limite :* *Soient E un espace vectoriel normé et X un partie non vide d'un espace vectoriel de dimension finie F, (f_n) une suite d'applications convergeant uniformément vers f et $a \in \overline{X}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ existe*

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

Théorème 14 *Soient E un espace vectoriel normé et I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite d'applications dérivables convergeant simplement vers f.*
Si (f'_n) converge uniformément sur I, alors

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$$

Théorème 15 *Soient (f_n) une suite d'applications de classe C^1 de [a,b] dans un espace de Banach E.*
On suppose que :
(i) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f_n(x_0)$ converge ;
(ii) la suite (f'_n) converge uniformément sur [a,b] vers une application g.
Alors (f_n) converge uniformément sur [a,b] vers f de classe C^1 et de plus $f' = g$.

1.3 Convergence uniforme et intégration [ELAM] p.151 → 189

Théorème 16 *Soit (f_n) une suite uniformément convergente de fonctions intégrables sur l'intervalle compact [a,b], à valeurs dans un espace de Banach E.*
Alors la fonction limite f est intégrable sur [a,b] et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 17 *On peut améliorer le résultat précédent*

Théorème 18 *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle compact [a,b] convergeant simplement vers une fonction f sur [a,b]. Si les fonctions f_n sont bornées par un même nombre k et si la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset]a,b[$. Alors la fonction limite f est intégrable sur [a,b] et on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 19

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x = 0$$

Théorème 20 *Théorème de convergence dominée :* *Soit]a,b[un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), et soit (f_n) une suite de fonctions définies de]a,b[dans $\mathbb{R}$. On suppose que*
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur]a,b[,
(ii) (f_n) converge simplement sur]a,b[vers une fonction f continue par morceaux sur]a,b[,
(iii) il existe $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive, telle que $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$.
Alors
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b |f_n(x)|\mathrm{d}x$ *converge,*
- $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ *converge,*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exemple 21

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x = 0$$

2 Séries de fonctions

2.1 Différents modes de convergence [ELAM] p.189 → 195

Définition 22 *Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E. On appelle série des fonctions f_n et on note $\sum f_n$, la suite (S_n) définie par*

$$\forall x \in X, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

et appelé la n-ième somme partielle de la série $\sum f_n$.
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X si la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur X.
On appelle reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$, la fonction R_n définie par

$$\forall x \in X, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

Exemple 23 *La série de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = xe^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} xe^{-kx} = \frac{x}{1-e^{-x}}$$

Définition 24 *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X (resp. converge uniformément sur tout compact inclus dans X) si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur X (resp.converge uniformément sur tout compact inclus dans X).*

Proposition 25 *Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle dans X.*
Soit $\sum f_n$ une série simplement convergente. $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle dans X.

Exemple 26 *La série de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = xe^{-nx}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (car $R_n(\frac{1}{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$), mais converge uniformément sur tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$.*

Proposition 27 *Critère de Cauchy uniforme :*
La série $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si :
$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \geq 1)$

$$\Rightarrow (\forall x \in X,\ ||f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)|| \leq \epsilon)$$

Définition 28 *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur X si, pour tout $x \in X$, la série réelle $\sum ||f_n(x)||$ converge.*

Exemple 29 *La série de fonctions définies par $f_n(x) = (-1)^n/n^x$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et converge absolument sur $]1, +\infty[$.*

Proposition 30 *Si la série $\sum f_n$ converge absolument sur X, alors elle converge simplement sur X.*

Définition 31 *On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur X si*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(X,E)$,*
- *$\sum ||f_n(x)||_\infty$ converge.*

Exemple 32 *La série de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = xe^{-nx}$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.*

Théorème 33 *Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur X, alors elle converge absolument et uniformément sur X.*

Exemple 34 (admis) *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-(x-n)^2}}{n}$ converge absolument et uniformément mais pas normalement sur $\mathbb{R}$.* **[HAU] p.255**

Proposition 35 *Soit $\sum(-1)^n g_n$ une série de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ telle que*
(i) $\forall x \in X$, la suite $(g_n(x))$ est décroissante,
(ii) la suite de fonctions g_n converge uniformément sur X vers la fonction nulle.
Alors la série $\sum(-1)^n g_n$ converge uniformément sur X.

Exemple 36 *La série $\sum(-1)^n/n^x$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.*

2.2 Convergence uniforme, limite, continuité et intégration [ELAM] p.195 → 201

Théorème 37 *Soit a un point adhérent à X et soit $\sum f_n$ une série de fonctions de X dans E. On suppose que*
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite l_n au point a,
(ii) la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
Alors
- la série $\sum l_n$ converge dans E,
- la fonction somme S admet une limite en a, et de plus

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$$

Théorème 38 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de X dans E. On suppose que*
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur X,
(ii) la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X.
Alors la fonction somme de la série $\sum f_n$ est continue sur X.

Exemple 39 *La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 40 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, (f_n) une suite de fonctions dérivables de I dans E. On suppose que la série $\sum f_n$ est simplement convergente et que la série $\sum f_n'$ converge uniformément. Alors la fonction somme de la série $S = \sum f_n$ est dérivable sur I, et on a*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

Théorème 41 *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur un intervalle [a,b] à valeurs dans E. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur [a,b], alors*
(i) la fonction somme de la série $S = \sum f_n$ est intégrable sur [a,b],
(i) la série de terme général $(\int_a^b f_n)$ converge, et on a

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x$$

Théorème 42 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de $L^1(I)$ et continues par morceaux sur I. On suppose de plus que*
(i) la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur I,
(ii) la fonction somme S est continue par morceaux sur I,
(iii) la série numérique $\sum \int_I f_n(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.
Alors
1) $\int_I |S(x)|\mathrm{d}x$ est convergente,
2) $\int_I |S(x)|\mathrm{d}x \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)|\mathrm{d}x$
3)

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) \mathrm{d}x$$

3 Séries entières et séries de Fourier

3.1 Séries entières [ELAM] p.229→250

Définition 43 *On appelle* <u>*série entière complexe de la variable complexe*</u> *toute série de la forme* $\sum a_n z^n$*, où* (a_n) *est une suite de nombres complexes appelée* <u>*suite de coefficients*</u> *de la série entière.*

Proposition 44 <u>*Lemme d'Abel :*</u> *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$*. Supposons que la suite* $(a_n z_0^n)$ *soit bornée. Alors, pour tout nombre complexe* z *tel que* $0 \leq |z| < |z_0|$*, la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument.*

Définition 45 *Soit* f *une fonction complexe de la variable réelle, définie sur une partie* X *de* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* <u>*développable en série entière*</u> *en 0, s'il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *et un nombre* $r \in]0, R]$ *avec* $]-r, r[\subset X$ *tel que*

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Proposition 46 *Soit* f *une fonction de classe* $C^{+\infty}$ *sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$*, contenant 0. Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in I$*, et notons* $R_n(x)$ *le reste d'ordre* n *définie par*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

. Alors f *est développable en série entière en* 0 *si et seulement s'il existe un intervalle ouvert contenant* 0 *sur lequel la suite* (R_n) *converge simplement vers la fonction nulle.*

Proposition 47 *Soit* f *une fonction de classe* C^{∞} *sur un intervalle ouvert* $I =]-\alpha, \alpha[$ *avec* $\alpha > 0$*, et s'il existe* $\rho > 0$ *et* $M \in \mathbb{R}_+$ *tels que*

$$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f *est développable en série entière en 0 sur l'intervalle* $]-R, R[$ *où* $R = \min(\alpha, \rho)$*.*

Application 48 <u>*Développements en série entière classiques :*</u>
• $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En particulier, $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
• $\forall x \in]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

• *Pour* $\alpha = 1$ *et en primitivant,* $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

En particulier, $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Application 49 ♠ <u>*Résolution de l'équation de Bessel*</u> ♠
Il existe une unique solution à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (E)$$

développable en série entière en 0 *et valant 1 en 0. C'est*

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

On déduit également

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\theta)) \mathrm{d}\theta$$

[FGNan4] p.101

3.2 Série de Fourier [ELAM] p.298→319

Proposition 50 <u>*Formule de Parseval :*</u> *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π*-périodique et continue par morceaux. Alors*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Définition 51 *Pour* $N \in \mathbb{N}$*, la fonction*

$$D_N = \sum_{-N}^{N} e_n \qquad \text{où } e_n(x) = e^{inx}$$

est appelée le <u>*noyau de Dirichlet d'ordre N.*</u>
[ELAM2] p.184

Proposition 52 *Pour* $f \in C_{2\pi}$*, on a*

$$S_N(f) = f * D_N$$

[ELAM2] p.184

Théorème 53 <u>*Théorème de Dirichlet :*</u> *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π*-périodique et de classe* C^1 *par morceaux. Alors la série de Fourier converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \to +\infty} S_N(f)(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$$

Théorème 54 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ avec pour somme la fonction f.*

Application 55 • $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

4 Théorèmes d'approximation

Théorème 56 ♠ *Théorème de Weierstrass* ♠
Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Alors f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme. **[GOUan] p.284 → 286**

Théorème 57 ♠ *Théorème de Féjer* ♠
En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} S_N(f)$, on a
1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty, \text{ et}$$

$$\lim_{N \to +\infty} ||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$$

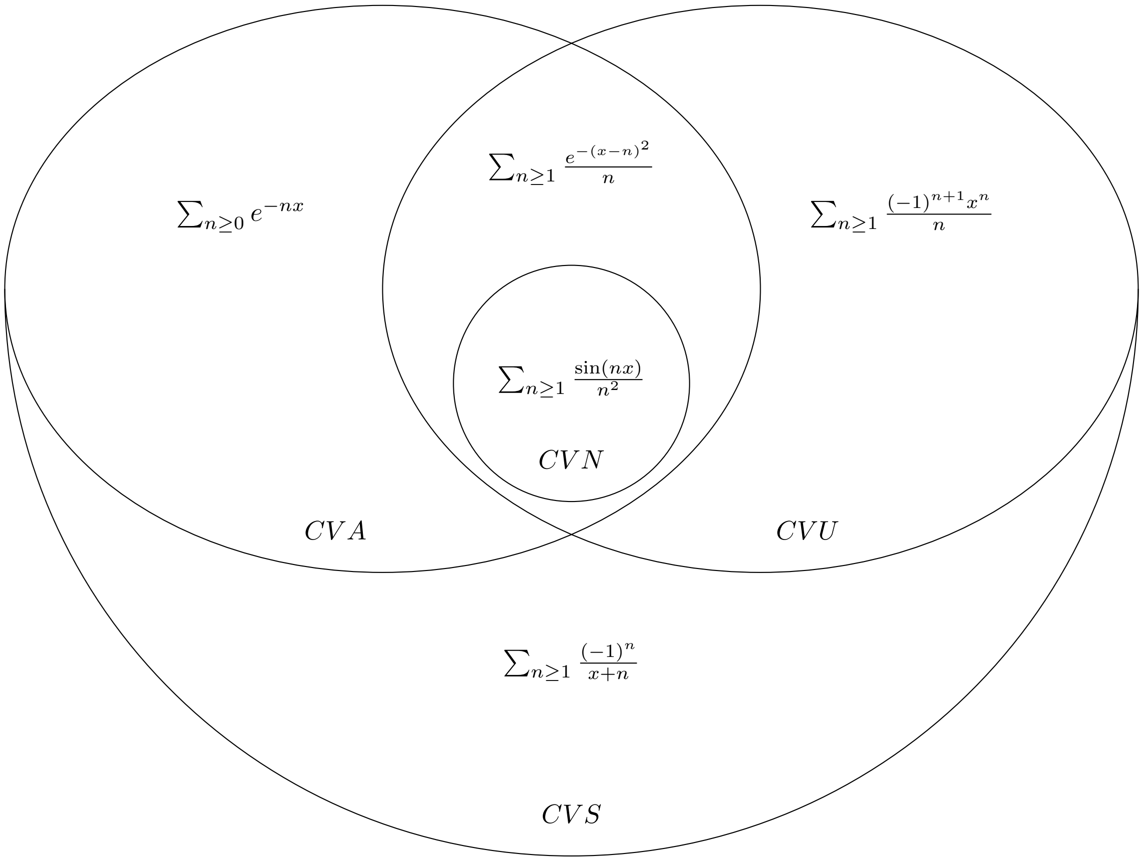
2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [0, +\infty[$, alors

$$||\sigma_N(f)||_p \leq ||f||_p, \text{ et}$$

$$\lim_{N \to +\infty} ||\sigma_N(f) - f||_p = 0$$

[ELAM2] p.185-186, 190-191

Illustrations



Questions

Exercice : Le théorème de Féjer dit que la moyenne de Cesàro des séries de Fourier d'une fonction f converge en norme L^p (pour $1 \leq p < +\infty$) vers f. Est-ce vrai pour $p = +\infty$?

Solution : La réponse est non. Tout simplement parce que $S_n(f)$ la moyenne de Cesàro des séries de Fourier d'une fonction f est un polynôme trigonométrique, donc cette moyenne est en particulier une fonction continue. Si elle convergeait vers $f \in L^\infty$, f doit être continue. Or il existe dans L^∞ des fonctions qui ne sont pas continues ... (par exemple, les fonctions indicatrices sur les segments).

Exercice : Soit X un ensemble compact dans un espace vectoriel muni d'un norme $||.||$. On considère l'ensemble A des fonctions continues de X dans X qui admettent un point fixe (*i.e.*)

$$A = \{f \in \mathcal{C}(X, X) \mid \exists x \in X,\ f(x) = x\}$$

Montrer que A est un fermé de $(\mathcal{C}(X, X), ||.||_\infty)$.

Solution : Soit (f_n) une suite de fonctions de A qui converge vers $f \in \mathcal{C}(X, X)$. Il faut donc montrer que $f \in A$.

D'une part, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f_n) \in A$, il existe x_n tels que $f_n(x_n) = x_n$.
D'autre part, comme X est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un élément $x \in X$.

Montrons que $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x)$:

$$\begin{aligned} ||f(x) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})|| &\leq ||f(x) - f(x_{\varphi(n)})|| + ||f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})|| \\ &\leq \underbrace{||f(x) - f(x_{\varphi(n)})||}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{car f est continue}}} + \underbrace{||f - f_{\varphi(n)}||_\infty}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ car\ f_{\varphi(n)} \to f}} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = f(x)$, or $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$ (car $f_{\varphi(n)} \in A$). Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$$

Par unicité de la limite, on a $f(x) = x$, et donc $f \in A$.
Conclusion : A est un fermé de $(\mathcal{C}(X, X), ||.||_\infty)$.

Exercice : Théorèmes de Dini
1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.
2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Solution : Remarquons que les énoncés, bien qu'en apparence semblables, sont totalement différents. On verra justement que les démonstrations sont différentes.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$F_n = \{x \in I \mid f(x) \geq f_n(x) + \epsilon\}$$

La suite (F_n) est décroissante de compacts de I (car fermés dans le compact I). De plus, on a

$$\bigcap_{n \geq 0} F_n = \varnothing$$

En effet, $\forall x \in I$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ et ainsi, il existe n_0 tel que $f(x) < \epsilon + f_{n_0}(x)$. Ainsi, $x \notin F_{n_0}$. Or, l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vide est non vide. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \varnothing$ (*i.e.*) pour tout $n \geq N$, $f < f_n + \epsilon$ sur I.
Comme la suite (f_n) est croissante, on a $f_n \leq f$. Ce qui donne

$$f_n \leq f < f_n + \epsilon \quad \text{pour tout } n \geq N$$

Ce qui nous donne la convergence uniforme.

2) Soit $\epsilon > 0$. f étant continue sur le compact I, par le théroème de Heine, on a

$$\exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Maintenant, on va donc travailler sur des petits intervalles (de taille $< \eta$). Considérons donc la subdivision

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b \quad \text{avec } |x_{i+1} - x_i| < \eta \text{ pour tout } i$$

Comme la suite $(f_n(x_i))$ converge vers $f(x_i)$ pour tout i. On a donc

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall i \in \{1, ..., k\},\ \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon \qquad (\dagger)$$

Prenons maintenant $x \in I$, il existe donc $i \in \{1, ..., k\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Par ailleurs, comme f_n est une fonction croissante pour tout n, la limite simple de la suite (f_n) est également une fonction croissante. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1}) \ \text{ et }\ f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$$

Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(x_i) - f_n(x_i) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_{i+1}) \qquad (\dagger\dagger)$$

Par $(\dagger)$, on a, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| &= |f(x_{i+1}) - f(x_i) + f(x_i) - f_n(x_i)| \\ &= |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| < 2\epsilon \end{aligned}$$

On montre de façon similaire que $|f(x_i) - f_n(x_{i+1})| < 2\epsilon$. En utilisant $(\dagger\dagger)$, on en déduit que

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in I,\ \ |f(x) - f_n(x)| < 2\epsilon$$

Ce qui nous donne la convergence uniforme.