Corvée n°2 - Correction

A rendre le : 04/10/2019

« On peut abandonner son intégrité pour presque rien mais c'est tout ce que nous possédons réellement, tout ce qui nous reste à la fin. Et dans ce petit espace nous sommes libres. »

V pour Vendetta

Hors-d'œuvre indispensable

IMPORTANT ! Si vous avez eu moins de la moyenne à cet exercice, il est IMPERATIF de revoir cet exercice très sérieusement !

Transformer l'expression donnée en une expression qui lui égale pour tout réel x et qui s'écrit sans parenthèses.

1. $3(x-2)+6(4-x) = 3\times x + 3\times(-2) + 6\times 4 + 6\times(-x) = 3x - 6 + 24 - 6x = -3x + 18$

2. $6\left(\frac{1}{3}x+1\right) - 12x = 6\times\frac{1}{3}x + 6\times 1 - 12x = \frac{6}{3}x + 6 - 12x = 2x + 6 - 12x = -10x + 6$

3. $\frac{3}{4}\left(-12x+\frac{16}{5}\right) = \frac{3}{4}\times(-12x) + \frac{3}{4}\times\frac{16}{5} = -\frac{3\times 12x}{4} + \frac{3\times 16}{4\times 5} = -\frac{3\times 3\times \cancel{4}x}{\cancel{4}} + \frac{3\times\cancel{4}\times 4}{\cancel{4}\times 5}$

$$= -9x + \frac{12}{5}$$

4. $2\left(x+\frac{1}{2}\right) - 3(x+1) = 2\times x + 2\times\frac{1}{2} - 3\times x - 3\times 1 = 2x + \frac{2}{2} - 3x - 3 = -x + 1 - 3$

$$= -x - 2$$

Exercice 1

Soient a, b, c et d quatre nombres réels non nuls. Montrer que

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\times\frac{bd}{ad+bc} = 1$$

La difficulté de cette exercice est de travailler exclusivement avec des lettres. Le premier reflexe à avoir, quandon voit une somme ou une différence de fractions) est de mettre au même dénominateur !

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\times\frac{bd}{ad+bc} = \left(\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{c\times b}{d\times b}\right)\times\frac{bd}{ad+bc} &= \left(\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}\right)\times\frac{bd}{ad+bc} \\
&= \left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\times\frac{bd}{ad+bc} \\
&= \frac{(ad+bc)\times bd}{bd\times(ad+bc)} \\
&= \frac{\cancel{(ad+bc)}\times\cancel{bd}}{\cancel{bd}\times\cancel{(ad+bc)}} = 1
\end{aligned}$$

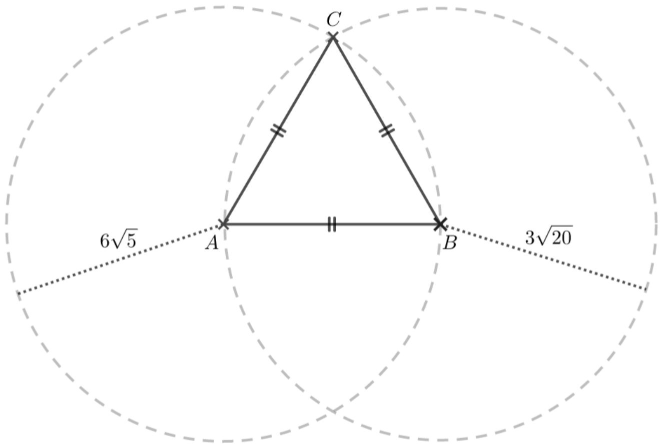
Exercice 2

On considère trois points A, B et C tels que :

$$AB = 2\sqrt{45}, \quad BC = 3\sqrt{20} \;\; et \;\; AC = 6\sqrt{5}$$

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Petit conseil : Quand vous faites un exercice de géométrie, **faites une figure**, et si possible en respectant à peu près les dimensions... Aidez vous de votre calculatrice pour avoir une idée des longueurs ! Cela vous donnera une idée de ce que vous devez démontrer (surtout quand la question est ouverte !). En effet, en faisant la figure, on remarque que le triangle semble être équilatéral (Une figure ne suffit pas à montrer le résultat !). On va donc démontrer ceci.



Méthode 1 (C'est la méthode attendue !) : Pour démontrer que le triangle ABC est équilatéral, il faut montrer que ces trois côtés sont égaux. Pour cela, nous devons écrire les 3 longueurs sous la "même forme" : sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b doivent être les mêmes pour les 3 longueurs (vu que l'on doit démontrer que les 3 côtés sont égaux)
De plus, b semble tout indiqué ! En regardant AC, on remarque que le nombre sous la racine carrée, c'est 5 et qu'on ne pourra pas de décomposer ce nombre... Essayons donc de faire apparaître 5 dans les autres racines.

$$AB = 2\sqrt{45} = 2\sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{9} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$BC = 3\sqrt{20} = 3\sqrt{4 \times 5} = 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{2^2} \times \sqrt{5} = 3 \times 2 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Méthode 2 :[1] On peut utiliser la propriété suivante :

« Deux nombres **positifs** *qui ont le même carré sont égaux. »*

En effet, si vous considérez, par exemple, les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 9 \end{cases}$$

Alors $x = -3$ ou $x = 3$ et idem pour y. Seulement, si vous imposez à x et y d'être positifs, alors $x = 3$ et $y = 3$, donc $x = y$.

Ici, AB, AC et BC sont trois longueurs, donc trois nombres positifs. Si leurs carrés sont égaux, alors les trois longeurs sont égales. Allons-y !

$$AB^2 = (2\sqrt{45})^2 = 2^2 \times (\sqrt{45})^2 = 4 \times 45 = 180$$

1. Merci à Lucie Tomala qui m'a suggéré cette méthode

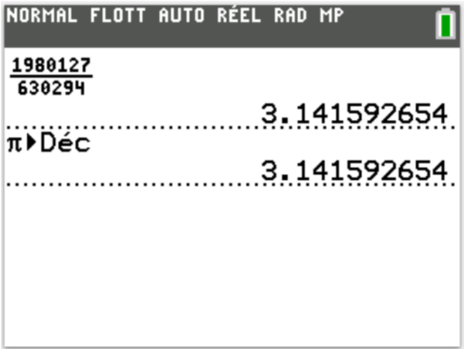
$$BC^2 = (3\sqrt{20})^2 = 3^2 \times (\sqrt{20})^2 = 9 \times 20 = 180$$

$$AC^2 = (6\sqrt{5})^2 = 6^2 \times (\sqrt{5})^2 = 36 \times 5 = 180$$

Comme $AB^2 = BC^2 = AC^2$, et que les trois longueurs sont positifs, alors $AB = BC = AC$. Donc le triangle ABC est équilatéral.

Ecrire $2\sqrt{45} \simeq 13.416407865$, $3\sqrt{20} \simeq 13.416407865$ et $6\sqrt{5} \simeq 13.416407865$, puis conclure que le triangle est équilatéral est faux ! On ne part jamais d'une approximation pour démontrer un résultat exact ! On remarque que l'on a bien $AB = AC = BC$ et donc que le triangle est équilatéral.

Ne croyez pas que c'est parce que votre calculatrice le dit que c'est vrai ! Je vous propose l'exemple suivant : voici ce que l'on obtient sur la calculatrice en effectuant les opérations suivantes



et pourtant

$$\pi \neq \frac{1980127}{630294}$$ [2]

En effet, en utilisant Python, et en exécutant l'algorthime suivant

```
from math import *
print("Approximation de pi sur Python :",pi)
fraction=1980127/630294
print("Approximation de la fraction :",fraction)
```

on obtient :

```
>>>
Approximation de pi sur Python : 3.141592653589793
Approximation de la fraction sur Python : 3.141592653587056
```

D'ailleurs, rappelez-vous qu'il est possible de demander à Python si une égalité est vraie ou non. Il suffit d'utiliser la commande "==".

```
>>> from math import *
>>> 1980127/630294==pi
False
```

On remarque qu'à partir de la douzième décimale, les chiffres ne sont plus les mêmes... La calculatrice ne vous donne qu'une approximation des nombres réels ! On ne conlut donc JAMAIS à partir d'une approximation faite à la calculatrice ! JAMAIS !

Exercice 3

1. Montrer que le nombre suivant est un entier :

$$(3\sqrt{7} + 4)(3\sqrt{7} - 4)$$

2. Merci à Anaïs TRUANT qui m'a suggéré cette approximation fractionnaire de π.

Il suffisait simplement de développer l'expression :

$$\begin{aligned}
(3\sqrt{7}+4)(3\sqrt{7}-4) &= 3\sqrt{7}\times 3\sqrt{7} + 3\sqrt{7}\times(-4) + 4\times 3\sqrt{7} + 4\times(-4)\\
&= (3\sqrt{7})^2 - 4\times 3\sqrt{7} + 4\times 3\sqrt{7} - 4^2\\
&= 3^2\times(\sqrt{7})^2 - 12\sqrt{7} + 12\sqrt{7} - 16\\
&= 9\times 7 \cancel{-12\sqrt{7}} + \cancel{12\sqrt{7}} - 16\\
&= 63 - 16 = 47 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

2. Que pensez-vous des deux affirmations suivantes :

« *Si a et b sont des entiers, alors $a\times b$ est un entier.* »

« *Si $a\times b$ est un entier, alors a et b sont des entiers.* »

Retenez une chose importante : un exemple ne suffit pas pour démontrer un résultat général ! En revanche, un contre-exemple suffit pour démonter une affirmation. C'est le but de cet exercice.

La première affirmation est bien évidemment vraie : quand on multiplie deux entiers, le produit reste entier !

Concernant la deuxième affirmation, l'erreur qu'il ne faut pas faire ici, c'est de prendre un entier, par exemple 12, et d'écrire $12 = 3\times 4$ (donc ici $a=3$ et $b=4$) puis de dire en effet que a et b sont des entiers...Vous n'avez traité qu'un cas (très) particulier... En effet, $12 = 3\times 4$ mais on a aussi $12 = 24\times\frac{1}{2}$ et dans ce cas, $\frac{1}{2}$ n'est pas entier... Nous venons donc de trouver un contre-exemple qui montre que la deuxième affirmation est fausse !

Au passage, la première question était également un contre-exemple pour la deuxième proposition. En effet, le produit est un entier alors que chacun des termes du produit ne l'est pas... :

$$\underbrace{(3\sqrt{7}+4)}_{\notin\mathbb{N}}\underbrace{(3\sqrt{7}-4)}_{\notin\mathbb{N}} = \underbrace{47}_{\in\mathbb{N}}$$

3. **(Bonus)** Le nombre $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ est-il entier ?

Il s'agit d'une technique qui doit être automatique quand vous voyez une somme ou une différence avec une racine carrée au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)} - \frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}\\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 1+(-1)\times\sqrt{2}+(-1)\times 1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 1+(-1)\times\sqrt{2}+(-1)\times 1}\\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4}+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4}+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}-1}\\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{1} - \frac{\sqrt{2}-1}{1}\\
&= (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)\\
&= \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1\\
&= 2 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

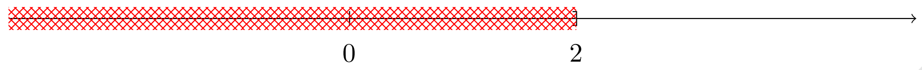
Remarque : Vous pouviez également remarquer qu'au dénominateur, on voit apparaître $(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)$ et donc on peut utiliser l'identité remarquable $(a-b)\times(a+b) = a^2-b^2$.

Exercice 4

Attention à cet exercice ! Même s'il s'agit d'un QMC et d'un Vrai/Faux, TOUTES les réponses doivent être justifiées.

1. QCM L'intervalle $]-\infty; 2]$ est l'ensemble des réels x tels que :

a. $x < 2$ $\boxed{\textbf{b. } 2 \geq x}$ **c.** $2 \leq x$ **d.** $x > 2$

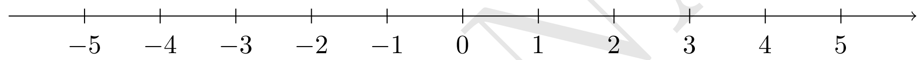


2. QCM L'ensemble des réels x tels que $-4 \leq x \leq 5$ est :

$\boxed{\textbf{a. } [-4; 5]}$ **b.** $]-4; 5[$ **c.** $[-4; 5[$ **d.** $]-4; 5]$

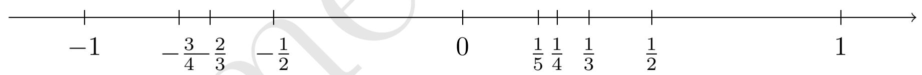
3. Vrai/Faux

Conseil : Il peut être intéressant de **savoir placer les nombres du type $\frac{1}{a}$ (où a est un entier)** sur la droite numérique. On sait placer les entiers sur la droite numérique



Pour les nombres du type $\frac{1}{a}$ (où a est un entier), il faut tout simplement les ranger dans l'"ordre inverse" (Retenez que $\frac{1}{2}$ est l'inverse de 2, $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3, etc.) On a donc :

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \Rightarrow \ldots < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

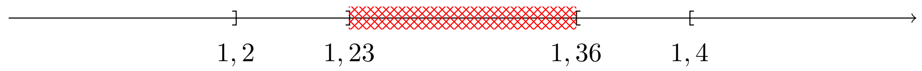


A partir de ce schéma, il est aisé de répondre aux questions suivantes :

a. $\frac{1}{4} \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ → **Vrai.**
b. $\frac{1}{5} \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$ → **Faux.**
c. $-\frac{3}{4} \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right]$ → **Faux.**

4. Vrai/Faux

Conseil : Il peut être (très !) intéressant de **dessiner** la droite numérique et de faire apparaître les intervalles en question :



a. Si $1,23 < x < 1,36$, il est possible que $1,2 < x < 1,4$.
Vrai. En effet, **il est possible** que $1,2 < x < 1,4$.

b. Si $1,23 < x < 1,36$, on est sûr que $1,2 < x < 1,4$.
Vrai. En effet, si $1,23 < x < 1,36$, il se situe dans un intervalle plus petit que l'intervalle définit par $1,2 < x < 1,4$.

c. Si $1,23 < x < 1,36$, alors $1,2 < x < 1,4$.
Vrai. Idem. Si $1,23 < x < 1,36$, alors il se situe dans un intervalle plus petit que l'intervalle définit par $1,2 < x < 1,4$.