Ensemble des nombres, intervalles, manipuler les nombres réels (racine carrée)

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

• Connaître les ensembles de nombres.
• Représenter un intervalle.
• Déterminer si un nombre appartient à un intervalle.
• Donner un encadrement décimal d'amplitude donnée.
• Donner les résultats fractionnaires sous forme irréductible.
• Manipuler la valeur absolue sans problème.
• Calculer la distance entre deux nombres.
• Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des racines carrées.

Mots – clefs :

Ensemble - Entiers naturels - Entiers relatifs - Nombres décimaux - Nombres rationnels - Nombres réels - Inclusion - Racine carrée - Intervalle - Encadrement - Ordre - Valeur absolue - Distance

Prérequis :

Nombres - Division euclidienne - Ordre - Fractions - Inégalité triangulaire - Théorème de Pythagore

𝄞 *La musique du chapitre : Parov Stelar - Catgroove. Album : Coco - Date de sortie : 2009.*

L'idée de départ est de "ranger" les nombres. Pour cela, on a deux façons de voir les choses :
- Soit on les range par ordre croissant (ou décroissant) :

$$... - 5.1 < 1 < 4 < 8.6 < ...$$

- Soit on les range par "type" de nombres :

$$\boxed{1\ 5\ 6\ ...},\ \boxed{5{,}3\ 1{,}2\ 8{,}9\ ...},\ \boxed{\pi\ \sqrt{2}\ ...}$$

On va justement voir qu'il est possible de faire "les deux en même temps".

Il est important de bien connaître les nombres, donc de les classifier, car on les utilise tous les jours : pour compter, pour trier, etc. ou pour rire (comme le montre cet excellent sketch de Raymond Devos)

On va s'arrêter un peu plus longtemps chez les nombres réels avec la notion d'*intervalle* et d'*encadrement*, mais également la notion de *valeur absolue*. L'idée globale de toutes ces notions va être d'approcher au mieux des nombres que l'on "ne sait pas écrire" (comme $\sqrt{2}$ ou π) et de connaître l'erreur que l'on fait avec cette approximation.

« Les nombres sont des libres créations de l'esprit humain. »

Richard Dedekind

---

1 Ensemble de nombres

1.1 Ensemble des entiers naturels

Il s'agit incontestablement de l'ensemble le plus facile. Ce sont les entiers positifs ou nuls $0; 1; 2; 3; ...; 2019; ...$. Il y en a une infinité ! L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. On écrit donc

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$$

Notation
Pour décrire un ensemble, on écrit la liste de ces éléments entre deux accolades.

1.2 Ensemble des entiers relatifs

Ce sont les entiers positifs, négatifs ou nuls. On a donc

$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$$

? *Mais pourquoi ... ?*
Richard Dedekind (1831-1916) utilisait la lettre K pour désigner l'ensemble des entiers relatifs. Par la suite, plusieurs notations ont été utilisés jusqu'à ce que Nicolas Bourbaki popularise l'usage de la lettre $\mathbb{Z}$, initiale de l'allemand *Zahlen* (nombres).

1.3 Ensemble des nombres décimaux

Définition 1 *Les* **nombres décimaux** *sont les nombres qui s'écrivent comme quotient d'un entier par* $1, 10, 100, 1000,$ *et plus généralement par* 10^k *où* k *est un entier naturel.*
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples
$5 = \frac{5}{1}$; $-7 = -\frac{7}{1}$; $0.01 = \frac{1}{100}$; $\frac{2}{5} = \frac{2\times 20}{5\times 20} = \frac{40}{100}$

Critère de divisibilité par 3
Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Par exemple, est-ce que 1701 est divisible par 3 ? Oui, puisque

$$1 + 7 + 0 + 1 = 9$$

Comme 9 est divisible, alors 1701 est divisible par 3.

Proposition 2 $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Fin 09/09
2$^{\text{nde}}$6-14

Kékidi ?

La proposition« $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ » se lit « $\frac{1}{3}$ *n'appartient pas à* $\mathbb{D}$. »

Heuristique

On doit montrer la non-appartenance d'un élément à un ensemble. La plupart du temps, comme ici, on utilise un *raisonnement par l'absurde* : en gros, on va supposer que notre élément appartient à l'ensemble (ce qui semble bête vu que l'on doit montrer qu'il n'appartient pas à cet ensemble...) et on va aboutir à une *absurdité* (d'où le terme « raisonnement par l'absurde »).

Pour rappel, les nombres décimaux s'écrivent $\frac{a}{10^k}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. On va donc supposer que $\frac{1}{3}$ s'écrit comme ça, et on va donc aboutir à une absurdité !

Démonstration par l'absurde

La démonstration	**Principe d'une démonstration par l'absurde**
• Supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal.	• On suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer.
• Dans ce cas, on peut écrire $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$ avec a et k des entiers naturels, et donc $10^k = 3a$. Ainsi, cela voudrait dire que 10^k est un multiple de 3. Or $10^k = 1$, ou 10 ou 100, etc., donc la somme de ces chiffres est toujours 1 et donc, d'après le critère de divisibilité par 3, 10^k n'est pas un multiple de 3.	• On raisonne comme si ce que l'on a supposé était vrai. On aboutit à une contradiction, ce qui est impossible en mathématiques !
• On a raisonné en supposant que $\frac{1}{3}$ était décimal, et on arrive à une contradiction. Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.	• On en déduit que ce que l'on a supposé est faux.

$\square$

1.4 Ensemble des nombres rationnels

Définition 3 *Les* **<u>nombres rationnels</u>** *sont les nombres qui s'écrivent comme quotient de deux entiers.*
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

$\frac{4}{3}$; $5 = \frac{5}{1}$; $-2.1 = \frac{21}{10}$; $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$\frac{210}{120} = \frac{210 \div 10}{120 \div 10} = \frac{21}{12} = \frac{21 \div 3}{12 \div 3} = \frac{7}{4}$ $\left(\frac{7}{4}\right.$ est la forme irréductible de $\left.\frac{210}{120}\right)$

Mais pourquoi ... ?

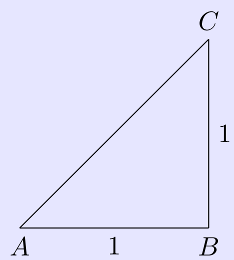
$\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres rationnels, a été baptisé ainsi par Peano en 1895, d'après l'initiale du mot italien *quoziente* (le quotient).

Proposition 4 (admise)
Tout rationnel admet une écriture sous forme d'une fraction irréductible, c'est-à-dire une écriture $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers ayant pour seuls diviseurs communs 1 et -1.

D'où vient $\sqrt{2}$?

On retrouve le nombre $\sqrt{2}$ dans le triangle rectangle le plus simple que l'on puisse construire : on prend deux cotés perpendiculaires qui valent 1 (dans la figure ci-contre ce sont les côtés AB et BC).
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



Proposition 5 (admise... pour le moment) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Un peu d'histoire

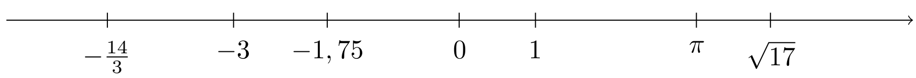
La démonstration d'Aristote (384 av. J.-C. - 322 av. J.-C.) signe la fin de l'école pythagoricienne ! Aristote a très souvent dit des crétineries. Il était meilleur en philosophie et en poésie qu'en sciences ; il a quand même laché des choses du genre "*l'être humain est composé d'air, de terre, d'eau et de feu*" ou encore il a estimé (et je dis bien "estimé" pas démontré !) que la circonférence de la Terre était de 60000 km ou encore il a démontré que la Terre était immobile (Oui oui, "démontré").... Mais on peut quand même lui attribuer le mérite de ce résultat.
Regardez cette géniallissime vidéo de e-penser qui fait un bref rappel de tout ce que je viens de dire !

Fin 09/09 $2^{\text{nde}}14$

Fin 10/09 $2^{\text{nde}}6$

1.5 Ensemble des nombres réels

Définition 6 *On considère une droite graduée et à chaque point de la droite on associe un nombre : son abscisse.*
Les **nombres réels** *sont les abscisses de tous les points de la droite graduée.*
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.
La droite qui représente $\mathbb{R}$ s'appelle la **droite numérique**.

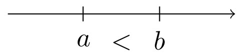


Remarque
Tous les nombres connus en classe de Seconde sont des nombres réels.

Définition 7 *Soient a et b deux nombres réels.*

$a < b$ *(ou $b > a$) signifie que $b - a$ est strictement positif.*

$a \leq b$ *(ou $b \geq a$) signifie que $b - a$ est positif ou nul.*



A raconter au prochain repas de famille
Le symbole $<$ s'appelle un *chevron*.

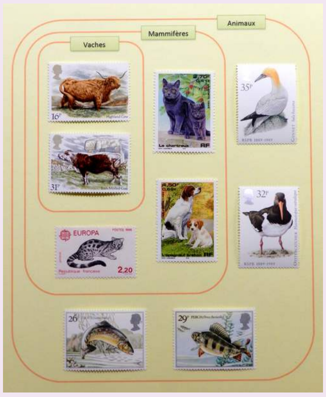
1.6 Inclusions

Définition 8 *Soient deux ensembles A et B. Par définition,* **<u>A est inclus dans B</u>** *si tout élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$.*

Exemple

Dans l'illustration ci-contre, on remarque que l'ensemble des vaches (Charolaise, Limousine, Blonde d'Aquitaine, Rouge des prés...) <u>est inclus dans</u> l'ensemble des mammifères (*on doit donc ajouter* chat, chien, éléphant...) qui est lui-même inclus dans l'ensemble des animaux (*on doit donc ajouter* oiseaux, reptiles...)

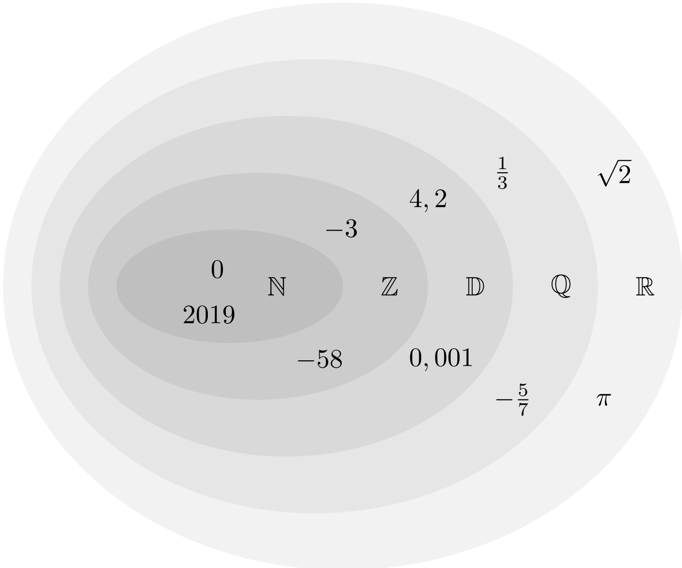
D'après une illustration originale de Jean-Yves Baudot.



Proposition 9

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Le schéma suivant permet d'avoir une visualisation de ces inclusions :



Attention !

Il ne faut pas confondre le symbole $\subset$ avec le symbole $\in$. Ils ne veulent pas dire la même chose. Par exemple :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ veut dire que <u>$\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$</u>.

alors que

$-13 \in \mathbb{Z}$ veut dire que <u>-13 est un élément de $\mathbb{Z}$</u>

2 Racine carrée

Définition 10 *Soit a un nombre réel positif. La* <u>**racine carrée**</u> *de a est l'unique nombre réel positif donc le carré est égal à a.*
Pour tout $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Remarque

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$

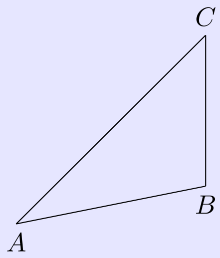
Exemples

$(\sqrt{3})^2 = 3$; $(\sqrt{121})^2 = (11)^2 = 121$

Inégalité triangulaire

Pour la suite, on aura besoin de l'inégalité triangulaire. L'inégalité triangulaire dit la chose suivante :

Dans un triangle, la longueur de chacun des côtés est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.



Dans le triangle ABC ci-contre, on a

$$AB \leq AC + BC$$
$$AC \leq AB + BC$$
$$BC \leq AC + AB$$

Cette inégalité, d'apparrence obsolète, est en fait un puissant outil mathématique ! Par exemple, elle permet de décider si un triangle est constructible ou non :

Il suffit de vérifier que la longueur du plus grand côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

Proposition 11 *Soient a et b deux nombres réels positifs. On a alors :*
1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
2. *Si* $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
3. *Si a et b sont strictement positifs, alors* $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Fin 10/09 $2^{\text{nde}}14$

Fin 10/09 $2^{\text{nde}}6$

Heuristique

Pour démontrer cette proposition, on ne sait pas grand chose, à part la définition de la racine carrée, et cela suffira principalement… Cependant, en plus de l'inégalité triangulaire qui a été rappelé, on aura également besoin des égalités suivantes :

$$(x \times y)^2 = x^2 \times y^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

Démonstration

1. Soient a et b des nombres réels positifs. On en déduit que $ab \geq 0$ donc $(\sqrt{ab})^2 = ab$.
De plus, $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2\sqrt{b}^2 = ab$.
Ainsi, $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré : ils sont donc égaux.

2. Avec $b \neq 0$, on a $\frac{a}{b} \geq 0$ et donc $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$.
De plus, $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$.
Ainsi, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré : ils sont donc égaux.

3. Considérons le triangle rectangle ABC ci-contre.
D'après le théorème de Pythagore, on a

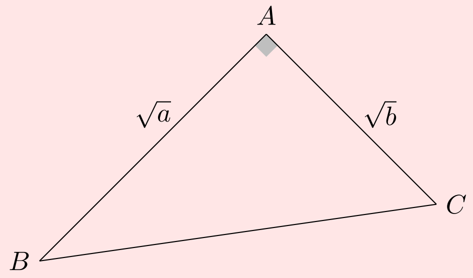
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2} = \sqrt{a+b}$$

Les points A, B et C ne sont pas alignés. L'inégalité triangulaire nous donne :

$$BC < AB + AC$$

On a donc

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$



□

Exemples

- $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
- $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$. On a bien $5 < 7$. Ouf !

Attention !

Pour a et b strictement positifs, on a TOUJOURS

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

En revanche,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

D'ailleurs, le deuxième exemple précédent le montre bien, on a

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \neq 7 = 4 + 3 = \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

Exercice

1. Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers strictement positifs, b étant le plus petit possible :
a. $\sqrt{50}$ **b.** $\sqrt{200}$ **c.** $\sqrt{147}$ **d.** $\sqrt{54}$
2. L'énergie cinétique d'un objet de masse m (en kg) et de vitesse v (en m.s^{-1}) est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.
Quelle est la vitesse d'un objet de masse 75kg et dont l'énergie cinétique est de 2400J (J=Joule) ?

Fin 16/09 2$^{\text{nde}}$14

Fin 16/09 2$^{\text{nde}}$6

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définitions - Exemple

- Les nombres réels a qui vérifient $2 \leq a < 5$, c'est-à-dire à la fois $2 \leq a$ et $a < 5$ forment la partie de la droite numérique colorée en rouge ci-dessous, appelée un **intervalle**.

- On dit que 2 et 5 sont les **bornes** de l'intervalle $[2; 5[$.
- Les crochets indiquent si les bornes appartiennent ou non à l'intervalle :

- En 2, le crochet est **fermé** (tourné vers l'intérieur) donc 2 appartient à l'intervalle.
- En 5, le crochet est **ouvert** (tourné vers l'extérieur) donc 5 n'appartient pas à l'intervalle.

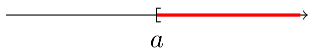
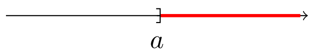
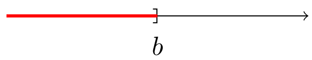
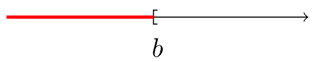
Définition 12

Ensemble des réels x tels que	*Représentation graphique*	*Notation*
$a \leq x \leq b$		$[a;b]$
$a < x < b$		$]a;b[$
$a \leq x < b$		$[a;b[$
$a < x \leq b$		$]a;b]$

Ces intervalles sont dits **<u>bornés</u>**.

Pour un intervalle borné, par exemple $[a;b]$, *on dit que* $b-a$ *est la* **<u>longueur de l'intervalle</u>**.

Définition 13

Ensemble des réels x tels que	*Représentation graphique*	*Notation*
$a \leq x$		$[a;+\infty[$
$a < x$		$]a;+\infty[$
$x \leq b$		$]-\infty;b]$
$x < b$		$]-\infty;b[$

Ces intervalles sont dits <u>non bornés</u> ou <u>illimités</u>.

Kékidi ?

$+\infty$ se lit *« plus l'infini »* et $-\infty$ se lit *« moins l'infini »*.

Remarque

- $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres ! Les crochets en $+\infty$ et $-\infty$ sont donc toujours ouverts !

• On entend souvent dire que l'on peut imaginer $+\infty$ comme un "très grand nombre". Il faut faire attention à cette comparaison. $+\infty$ désigne plutôt une "limite que l'on ne peut pas atteindre".

A raconter au prochain repas de famille

• Le symbole ∞ s'appelle un *lemniscate*, qui provient du mot latin *lemniscus*, qui signifie « *ruban* ».
• En parlant de "très grand nombre", il est souvent difficile de se représenter la valeur réelle d'un grand nombre. Par exemple, vous êtes-vous déjà demandé ce que représentait réellement un milliard ? Ou 1 million ?
Pour vous éclairer, imaginons que l'on puisse compter sans interruption jusqu'à un milliard au rythme d'un chiffre toutes les trois secondes (pour bien prononcer les grands nombres). Cela va donc nous prendre trois milliards de secondes... Bon super, on est toujours pas avancé... Que représente trois milliards de secondes ?
On va convertir ces secondes en années : il faut les diviser par 60 (minutes), puis par 60 à nouveau (heures), puis par 24 (jours) et finalement par 365 (années). On obtient 95,1 ans.
Il faudrait donc compter sans interruption durant plus de 95 ans pour arriver à un milliard ! À titre de comparaison également, 23 jours sont nécessaires pour compter jusqu'à un million et environ 15 minutes pour arriver à mille.

Fin 23/09 $2^{\text{nde}}14$

Fin 24/09 $2^{\text{nde}}6$

Exercice

Ecrire sous forme d'intervalles chacun des ensembles de réels suivants :

1. ensemble des x tels que $-1 \leq x < 4$;
2. ensemble des x tels que $2 > x > 0$;
3. ensemble des x tels que $x > 4$;
4. ensemble des x tels que $2 \geq x$;

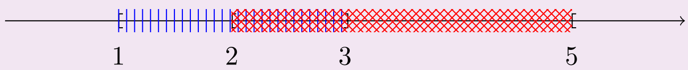
Exercice

On désigne par x un nombre réel. Chacune des propositions énoncées ci-dessous est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
1. Si $1,42 \leq x \leq 1,56$, il est possible que $1,4 \leq x \leq 1,5$.
2. Si $1,42 \leq x \leq 1,56$, on est sûr que $1,4 \leq x \leq 1,5$.
3. Si $1,42 \leq x \leq 1,56$, alors $1,4 \leq x \leq 1,5$.

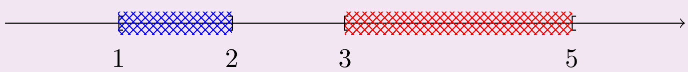
Définition 14 *Si I et J sont deux intervalles, on définit :*
• **<u>la réunion de I et J</u>**, *noté $I \cup J$, comme l'ensemble obtenu en réunissant les éléments de I et ceux de J.*
• **<u>l'intersection de I et J</u>**, *noté $I \cap J$, comme l'ensemble des éléments communs à I et J.*

Exemple

• $I = [1; 3]$ et $J = [2; 5[$, alors



L'union $I \cup J$ est l'intervalle $[1, 5[$.
L'intersection $I \cap J$ est l'intervalle $[2; 3]$.
• $I = [1; 2]$ et $J = [3; 5[$, alors



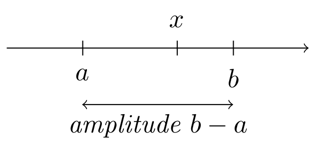
L'union $I \cup J$ est $[1,2] \cup [3;5[$ (ce n'est pas un intervalle !).
L'intersection $I \cap J$ est **l'ensemble vide**, noté $\varnothing$.

Exercice

Ecrire l'ensemble des nombres réels représentés en rouge ci-dessous :

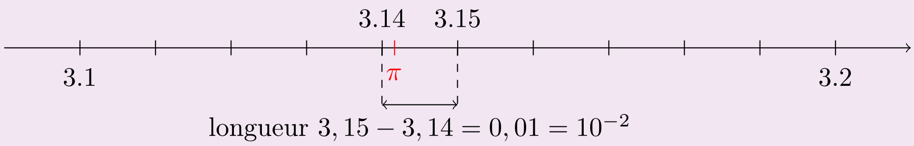
4 Encadrement décimal d'amplitude donnée

Définition 15
Donner un **encadrement décimal** *d'un réel x, c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$.*
$b - a$ est appelé **amplitude de l'encadrement**.
L'encadrement est **à 10^{-n} près** *(où n est un entier) si son amplitude est égale à 10^{-n}.*



Exemple

$3,14 \leq \pi \leq 3,15$ est un encadrement décimal de π à $0,01$ près (à 10^{-2} près).



Exercice

1. Donner un encadrement décimal de $\frac{2}{3}$:
a. à $0,1$ près
b. à $0,01$ près
c. à $0,001$ près
2. En TP de chimie, Professeur Proton a mesuré une masse m ; il dit que $m = 11,6$kg et que le résultat est connu à $\pm 0,5$ près.
Donner un encadrement de m en kg et préciser son amplitude.

Fin 24/09 2nde14

Fin 24/09 2nde6

Exercice : Approchons π

1. Quelle valeur approchée de π connaissez-vous ?
2. Avec Archimède.
On considère l'encadrement $3 < \pi < \frac{22}{7}$.
Entre quelles valeurs peut-on encadrer l'aire d'un disque de rayon 1 cm ?
3. Avec les Egyptiens.
Pour calculer l'aire d'un disque, les Egyptiens utilisaient l'algorithme suivant

Multiplier le diamètre par 8
Diviser par 9
Elever au carré

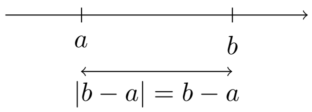
Quel résultat obtient-on pour un disque de rayon 1 cm ?
4. Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.

5 Distance et valeur absolue

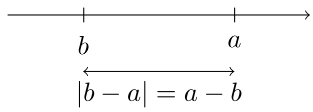
Bon faisons une petite pause... Jusqu'ici, on "connait" pas mal de nombres. Le sens du mot "connaître" est à préciser... Tous les nombres appartenant à $\mathbb{Q}$ ont une écriture fractionnaire connue ! Et certains nombres réels aussi : par exemple $\sqrt{2}$. Mais d'autres nombres nous échappent... On ne sait pas vraiment les "écrire"... On peut donner un encadrement décimal comme on l'a vu précédemment, ou, comme on va le voir, donner un encadrement en évaluant la précision obtenue en termes de distance...

Définition 16 *La* **distance entre deux réels** a **et** b *est notée* $|a-b|$ *ou* $|b-a|$ *et définie par :*

- *Si* $a \leq b$:



- *Si* $a \geq b$:

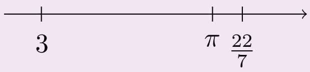


Kékidi ?
$|b-a|$ se lit *« valeur absolue de $b-a$ »*.

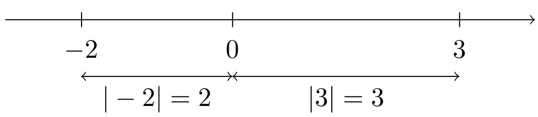
Exemple
$|\pi - 3|$ est la distance entre π et 3. Comme $\pi > 3$, on a $|\pi - 3| = \pi - 3$.

$|\pi - \frac{22}{7}|$ est la distance entre π et $\frac{22}{7}$. Comme $\pi < \frac{22}{7}$, on a $|\pi - \frac{22}{7}| = \frac{22}{7} - \pi$.

On peut donc en déduire que 3 et $\frac{22}{7}$ sont des valeurs approchées de π à $\frac{22}{7} - 3 = \frac{1}{7}$ près.



Définition 17 *La* **valeur absolue** *d'un réel x, notée $|x|$, est la distance ente x et 0.*
La valeur absolue d'un nombre positif est lui-même.
La valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

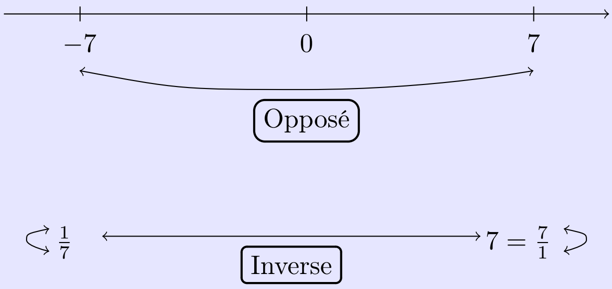


Exemple
$|3| = 3$ car 3 est positif.
$|-5| = 5$ car -5 est négatif.
$|\pi - 3| = \pi - 3$ car $\pi - 3$ est positif.

$|x+3| = |x-(-3)|$ est la distance entre x et -3.

Attention

Il y a bien une différence entre « opposé » et « inverse » ! Par exemple, -7 est l'opposé de 7 mais $\frac{1}{7}$ est l'inverse de 7.
Retenez que -7 est l'opposé de 7 par rapport à 0, tandis que pour l'inverse, en prenant 7, qui s'écrit aussi $\frac{7}{1}$, on « renverse » la fraction et cela donne $\frac{1}{7}$.



Remarque

- Pour tout réel x, $|x|$ est positive ou nulle. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Deux réels opposés ont la même valeur absolue.

Proposition 18 *Pour tout réel x, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.*

Heuristique

La démonstration qui suit fait intervenir un nouveau type de raisonnement : le *disjonction de cas*. On remarque que la valeur absolue est enquiquinante car elle dépend du signe de x. On va donc raisonner en fonction du signe de x.

Démonstration par disjonction de cas

- Cas où $x \geq 0$:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x \times x} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x = |x|$$

- Cas où $x < 0$:

On a $x^2 = (-x)^2$ et $-x > 0$. Par conséquent

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$$

□

Exemple

$\sqrt{7^2} = |7|$.

Attention !

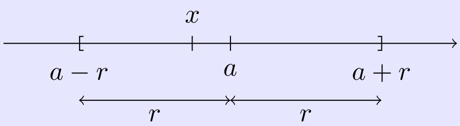
Il faut absolument bien distinguer le "sens" des opérations ! En effet $\sqrt{x^2}$ est toujours égal $(\sqrt{x})^2$! MAIS, dans le cas, $\sqrt{x^2}$, x peut être positif OU négatif, alors que dans le cas $(\sqrt{x})^2$, x est TOUJOURS positif !

Fin 30/09 $2^{\text{nde}}14$

Fin 01/10 $2^{\text{nde}}6$

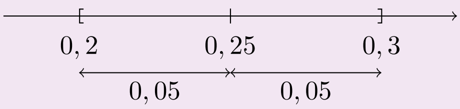
Cas particulier : l'intervalle [a-r ;a+r]

Soit a un réel et r un réel positif ou nul.
On dit que l'intervalle $[a-r;a+r]$ a pour **centre** a et pour **rayon** r.
Dire qu'un réel x appartient à $[a-r;a+r]$ revient à dire que $|x-a| \leq r$.



Exemple

L'intervalle $[0,2;0,3]$ a pour longueur $0,3-0,2=0,1$ donc son rayon est $\frac{0,1}{2}=0,05$.
Son centre $0,2+0,05=0,25$ ou encore $\frac{0,2+0,3}{2}=0,25$.
Dire que x appartient à l'intervalle $[0,2;0,3]$ revient donc à dire que la distance de x au centre $0,25$ de l'intervalle est inférieure ou égale à $0,05$, c'est-à-dire $|x-0,25| \leq 0,05$.



Exercice

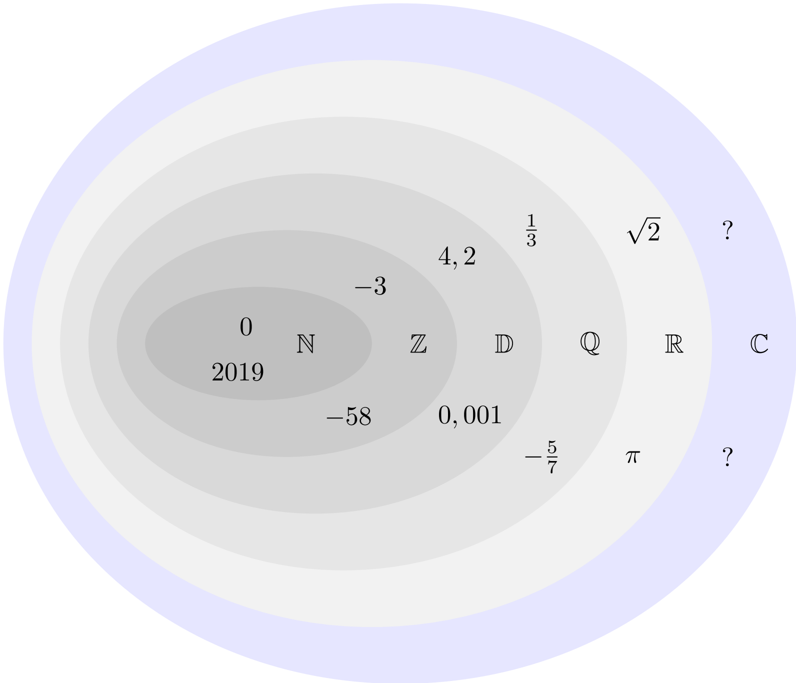
1. Interpréter géométriquement $|x-2|$ pour un réel x donné. En déduire les réels x tels que $|x-2|=3$.
2. Interpréter géométriquement $|x+3|$ pour un réel x donné. En déduire les réels x tels que $|x+3| \leq 1$.
3. Interpréter en termes de distance $\left|\sqrt{2}-\frac{17}{12}\right| \leq 3 \times 10^{-3}$, puis en déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
4. En TP de physique, Professeur Proton a mesuré une longueur L ; il dit que $L=12,3$cm à $\pm 0,05$ près.
A quel intervalle appartient la mesure de L en cm ? Interpréter à l'aide d'une valeur absolue.

Fin 01/10 $2^{\text{nde}}14$

Fin 01/10 $2^{\text{nde}}6$

6 Ouverture

On ne vous a pas tout dit ... En fait, il y a encore un ensemble "au dessus" de $\mathbb{R}$: il s'agit de l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$. Cet ensemble sera vu en Terminale. Mais il n'a pas d'aussi "bonnes" propriétés que $\mathbb{R}$: par exemple, dans cet ensemble, il est impossible de classer les éléments par ordre croissant ou décroissant ...



Question ouverte : A votre avis, $\mathbb{Z}$ a-t-il plus d'éléments que $\mathbb{N}$?

Culture scientifique : Mais qui est Nicolas Bourbaki ?