Vade-mecum[1]

Mohamed NASSIRI

[1] *(du latin* `vade mecum`*, viens avec moi), guide, manuel que l'on garde avec soi pour le consulter.*

« Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ? »

Henri Poincaré

Ecritures fractionnaires

Egalité / Simplification

Un quotient ne change pas quand on multiplie ou qu'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Exemples :

$\frac{8}{12} = \frac{4\times 2}{4\times 3} + \frac{\cancel{4\times}2}{\cancel{4\times}3} = \frac{2}{3}$

$\frac{4x+8}{4} = \frac{4\times(x+2)}{4} = \frac{\cancel{4\times}(x+2)}{\cancel{4}} = x+2$

Addition

Pour additionner deux nombres écrits comme des quotients, le dénominateur doit être le même :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\times d}{b\times d} + \frac{c\times b}{d\times b} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Exemples :

$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2\times 4}{3\times 4} + \frac{5\times 3}{4\times 3} = \frac{8}{12} + \frac{15}{12} = \frac{23}{12}$

$4 + \frac{3}{5} = \frac{4}{1} + \frac{3}{5} = \frac{20}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$

Multiplication

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d} \qquad (b\neq 0,\ d\neq 0)$$

Cas particulier : $a \times \frac{b}{c} = \frac{a\times b}{c} \qquad (c\neq 0)$

Exemples :

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2\times 5}{3\times 7} = \frac{10}{21}$; $3 \times \frac{5}{4} = \frac{4}{1} + \frac{3}{5} = \frac{20}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$

Il est plus judicieux de simplifier avant de multiplier !

$\frac{4}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{4\times 5}{3\times 2} = \frac{2\times 2\times 5}{3\times 2} = \frac{2\cancel{\times 2}\times 5}{3\cancel{\times 2}} = \frac{10}{3}$

$18 \times \frac{13}{6} = 3\times 6\times\frac{13}{6} = 3\cancel{\times 6}\times\frac{13}{\cancel{6}} = 3\times 13 = 39$

Opposé

Prendre l'opposé d'un quotient revient à prendre l'opposé du numérateur (ou du dénominateur) :

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad (b\neq 0)$$

Exemples :

$-\frac{7}{4} = \frac{-7}{4}$; $\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

$-\frac{x+1}{3} = \frac{-(x+1)}{3} = \frac{-x-1}{3}$

Division

Pour diviser par un nombre non nul, on multiplie par son inverse. En particulier, diviser par $\frac{a}{b}$ revient à multiplier par $\frac{b}{a}$.

Attention à la place du signe d'égalité pour bien repérer qui est divisé par qui... !

Exemples :

$\frac{2}{\frac{2}{3}} = 2\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

$\frac{5}{\frac{3}{10}} = 5\times\frac{10}{3}\frac{50}{3}$ est différent de $\frac{\frac{5}{3}}{10} = \frac{5}{3}\times\frac{1}{10} = \frac{5\times 1}{3\times 10} = \frac{1}{6}$

Mohamed NASSIRI

Pourcentages

Appliquer un pourcentage

4% de 120€ $= 120€ \times \frac{4}{100} = \frac{120 \times 4}{100}$€$= 4,80$€

Calculer un pourcentage

Quel pourcentage de 120€ représentent 24€ ?
$\frac{24}{120} = 0,2 = \frac{20}{100}$, donc 24€ réprésentent 20% de 120€.

Des correspondances à bien connaître :
prendre 25% de... = prendre un quart de = $\frac{1}{4} \times ...$
prendre 50% de... = prendre la moitié de = $\frac{1}{2} \times ...$
prendre 75% de... = prendre trois quarts de = $\frac{3}{4} \times ...$

Augmenter une quantité

Augmenter une quantité de 5% revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05$

Exemples :
Après augmentation de 12%, un article à 40€ coûte 40€$= \times \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 40$€$\times 1,12 = 44,80$€.

Diminuer une quantité

Diminuer une quantité de 5% revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0,95$

Exemples :
Après diminution de 12%, un article à 40€ coûte 40€$= \times \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 40$€$\times 0,88 = 35,20$€.

Carrés et racines carrées

Carré d'un produit et d'un quotient

$(-a)^2 = a^2$
$(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad (b \neq 0)$

Exemples :
$(-3)^2 = 3^2 = 9$
$(3x)^2 = (3 \times x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9 \times x^2 = 9x^2$
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

Racine carrée d'un produit et d'un quotient

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$

Exemples :
$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

Puissances

Premières propriétés

Pour un nombre a et un entier m :
Si $m > 0$, $a^m = \underbrace{a \times ... \times a}_{m\ fois}$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
Convention : $a^0 = 1$

Exemples :
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
$(2+a)^2 = (2+a) \times (2+a)$
$x^3 = x \times x \times x = x^2 \times x$
$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Cas particulier : les puissances de 10 **:**
$10^3 = 1000$; $10^5 = 100000$
$10^{-3} = 0,001$; $10^{-5} = 0,00001$

Exemples :
$2,45 \times 10^3 = 2450$; $5460 = 5,46 \times 10^3$
$12 \times 10^{-3} =^0,012$; $0,0023 = 2,3 \times 10^{-3}$

Puissance d'un produit et d'un quotient

Pour deux nombres réels non nuls a et b, et deux entiers relatif m et p :
$a^m \times a^p = a^{m+p}$
$(a^m)^p = a^{m \times p}$
$(a \times b)^m = a^m \times b^m$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$

Exemples :
$x^2 \times x = x^2 \times x^1 = x^{2+1} = x^3$
$(3x)^2 = (3 \times x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9 \times x^2 = 9x^2$
$16x^2 = 4^2 \times x^2 = (4 \times x)^2 = (4x)^2$
$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} \frac{x^3}{8}$
$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

Mohamed NASSIRI

Distributivité

Simple distributivité

Pour tout nombres k, a et b, on a toujours :

$$k \times (a+b) \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} k \times a + k \times b \qquad k \times (a-b) \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} k \times a - k \times b$$

Exemples :

On développe :
$3x(x+5) = 3x \times (x+5) = 3x \times x + 3x \times 5 = 3x^2 + 15x$

On factorise :
$4x + 5x = 4 \times x + 5 \times x = (4+5)x = 9x$
$x^2 + 3x = x \times x + 3 \times x = x \times (x+3)$

Double distributivité

Pour tout nombres a, b, c et d, on a toujours :

$$(a+b) \times (c+d) \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exemples : On développe :

$$\begin{aligned} (x+3)(x-4) = (x+3) \times (x+(-4)) &= x \times x + x \times (-4) + 3 \times x + 3 \times (-4) \\ &= x^2 - 4x + 3x - 12 \\ &= x^2 - x - 12 \end{aligned}$$

Identités remarquables

Pour tout nombres a et b, on a toujours :

$$(a+b) \times (a-b) \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a^2 - b^2$$

Exemples :
On développe :
$(x-3) \times (x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
$(3x+5) \times (3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$
On factorise :
$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4) \times (x+4)$
$25x^2 - 81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x-9) \times (5x+9)$

$$(a+b)^2 \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a^2 + 2ab + b^2$$

Exemples :
On développe :
$(x+7)^2 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$
$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$
On factorise :
$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 = (x+4)^2$
$25x^2 + 90x + 81 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 9 + 9^2 = (5x+9)^2$

$$(a-b)^2 \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a^2 - 2ab + b^2$$

Exemples :
On développe :
$(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 6x + 9$
On factorise :
$x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = (x-6)^2$
$9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x-1)^2$

Mohamed NASSIRI