

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Mohamed NASSIRI

En géométrie, le barycentre d'un ensemble fini de points est le point obtenu en réalisant la moyenne arithmétique des positions de chacun de ces points affectés d'une pondération.

En physique, la notion de barycentre permet par exemple de déterminer le point d'équilibre d'un ensemble fini de points matériels ou le centre d'inertie d'un solide.

Mathématiquement, le barycentre s'obtient en annulant une relation vectorielle. C'est une notion qui généralise la construction du milieu d'un segment ou du centre de gravité d'un triangle.

Plus généralement, le barycentre peut se définir dans le cadre d'un espace affine quelconque. Le barycentre est un outil central en géométrie affine qui permet de caractériser et étudier les sous-espaces affines, les applications affines et la convexité.

Références

- [DJMER] Cours de géométrie, Dany-Jack Mercier
[TRUF] Géométrie élémentaire, Bernard Truffault
[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[FGNag3] Algèbre 3 Orléans X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Suite de polygones
Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Dans cette leçon, E est un espace affine sur \mathbb{R} de direction un espace vectoriel \vec{E}

$(A_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(1)}), \dots, (A_{\sigma(n)}, \alpha_{\sigma(n)})$ où σ désigne une permutation de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Associativité : Si $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et si $s = \sum_{i \in J} \alpha_i$, alors G est le barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i \notin J}, (g, s)$, où g désigne le barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i \in J}$.

1 Barycentres

1.1 Définitions et premières propriétés [DJMER] p.35-36

Définition 1 Un système de points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ est la donnée de n points A_1, \dots, A_n de E et de n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

A chaque système de points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$, on associe la fonction vectorielle de Leibniz $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Définition 2 Le barycentre du système de points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$, tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, est l'unique point G vérifiant $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. L'isobarycentre de n points A_1, \dots, A_n est le barycentre de ces n points affectés de coefficients tous égaux entre eux.

Théorème 3 Soit G le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$.

1) Homogénéité : G est aussi le barycentre de $(A_1, \lambda \alpha_1), \dots, (A_n, \lambda \alpha_n)$.

Commutativité : G est le barycentre de

Proposition 4 Expression des coordonnées du barycentre dans le plan :

Le plan (resp. le plan complexe) étant rapporté à un repère, on considère n points de E A_1, \dots, A_n données par leurs coordonnées $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ (resp. leurs affixes $(z_1), \dots, (z_n)$) et n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ admet pour coordonnées (resp. affixe) :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

$$\left(\text{resp. } z = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right)$$

[TRUF] p.41

Application 5 ♠ Suite de polygones ♠

Soit $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ une suite d'affixes du plan complexe.

En notant, $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$, on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \text{ et}$$

$$Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \right)$$

Alors la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des affixes z_1, \dots, z_n .

1.2 Lien entre sous-espaces affines, applications affines et barycentration [DJMER] p.38-39, p.47

Théorème 6 *Le sous-espace affine engendré par une partie non vide A de E est égal à l'ensemble des barycentres des points de A .*

Théorème 7 *Une partie non vide F de E est un sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentration.*

Théorème 8 *Une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre.*

Théorème 9 *Une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre.*

Théorème 10 *Soient $A_1, \dots, A_n \in E$. Il y a équivalence entre :*

- 1) $\forall j, \{\overrightarrow{A_j A_i}\}_{i \neq j}$ est un système libre,
- 2) $\forall j, A_j$ n'appartient pas au sous-espace affine engendré par $\{A_i\}_{i \neq j}$ est un système libre,
- 3) $\exists j, \{\overrightarrow{A_j A_i}\}_{i \neq j}$ est un système libre.

Définition 11 *Une famille de points $\{A_1, \dots, A_n\}$ est dite affinement libre si elle vérifie l'une des conditions du théorème précédent.*

1.3 Coordonnées barycentriques [DJMER] p.41

Définition 12 *Soit E un espace affine de dimension n sur \mathbb{R} . Un repère affine (ou une base affine) de E est une $(n+1)$ -liste (A_0, A_1, \dots, A_n) de points affinement libres.*

Définition 13 *Soit $\mathcal{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine de E , et $M \in E$. On appelle système de coordonnées barycentriques de M dans \mathcal{R} toute $(n+1)$ -liste de réels $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ telle que M soit le barycentre de $(A_0, \alpha_0), \dots, (A_n, \alpha_n)$. Le système est dit normalisé si $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$*

1.4 Barycentres de deux et trois points [TRUF] p.47 → 51

Illustration 14 *Coordonnées barycentriques de deux points (A, a) et (B, b) : cf. figure (1).*

Définition 15 *Soit ABC un triangle donné (par usage, $a = BC, b = AC, c = AB$ et $\hat{A} = \widehat{BAC}, \hat{B} = \widehat{ABC}, \hat{C} = \widehat{ACB}$) et M désigne un point de son plan avec $M \notin \{(AB), (BC), (CA)\}$.*

On note α, β, γ ses coordonnées barycentriques relatives à ABC .

On définit l'aire algébrique du triangle MBC comme étant son aire géométrique affectée du signe "+" s'il a même orientation que le triangle ABC , et du signe "-" dans le cas contraire. On définit de même l'aire algébrique de MCA et MAB .

Les aires des triangles MBC, MCA et MAB obéissent à la règle schématisée en figure (2).

Proposition 16 *Les aires algébriques de MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M .*

Application 17 *Le centre du cercle inscrit : (a, b, c) est un système de coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit.*

Application 18 *Le centre du cercle circonscrit : $(\sin 2\hat{A}, \sin 2\hat{B}, \sin 2\hat{C})$ est un système de coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit.*

Application 19 *L'orthocentre : $(\tan \hat{A}, \tan \hat{B}, \tan \hat{C})$ est un système de coordonnées barycentriques de l'orthocentre.*

1.5 Théorèmes de Céva et Ménélaüs [TRUF] p.51-52

Théorème 20 *Théorème de Céva :*

Etant données un triangle ABC et trois points A', B', C' , situés respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$, dont aucun ne coïncide avec l'un des sommets, les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles si, et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Théorème 21 *Théorème de Ménélaüs :*

Etant données un triangle ABC et trois points A', B', C' , situés respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$, dont aucun ne coïncide avec l'un des sommets, les points $A', B',$ et C' sont alignés si, et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

2 Convexité

2.1 Ensembles convexes

Définition 22 *Soient A et B deux points de E . L'ensemble :*

$$[AB] = \{M \in E \mid \exists t \in [0, 1] \widehat{AM} = t\widehat{AB}\}$$

est appelé segment d'extrémités A et B .

Définition 23 *Une partie C de E est convexe si et seulement si pour tous points A, B de C le segment $[AB]$ est inclus dans C . est appelé segment d'extrémités A et B .*

Exemple 24 Exemples d'ensembles convexes et non convexes. cf. figure (3).

Définition 25 L'épigraphe d'une fonction f est l'ensemble des points situés au-dessus de la courbe représentative de la fonction f .

Proposition 26 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

2.2 Enveloppe convexe

Définition 27 Soit \mathcal{A} une partie non vide de E . Le convexe

$$\begin{aligned} \text{Conv}(\mathcal{A}) &= \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ convexe} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{C}}} \mathcal{C} \\ &= \text{Min}\{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ convexe et } \mathcal{A} \subset \mathcal{C}\} \end{aligned}$$

où le minimum est considéré pour la relation d'ordre \subset dans $\mathcal{P}(E)$.

Théorème 28 L'enveloppe convexe de \mathcal{A} est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de \mathcal{A} .

Application 29 • Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

• Le plus grand entier n tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1 est 7.

• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ . On suppose que P' a une racine dans H_1 . Alors $P(H_1) = \mathbb{C}$.

Corollaire 30 Une partie non vide de E est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration à coefficients positifs.

Théorème 31 Théorème de Carathéodory :

Si $\dim E = n$ alors tout point de l'enveloppe convexe de \mathcal{A} est barycentre à coefficients positifs de moins de $n+1$ points de \mathcal{A} .

Corollaire 32 Dans un espace affine de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

2.3 Points extrémaux [ML3ag] p.131-132

Définition 33 Soit M un point d'un convexe \mathcal{C} . On dit que M est un point extrémal (de \mathcal{C}) si et seulement si M n'est pas le milieu de deux points distincts de \mathcal{C} .

Proposition 34 Soit M un point d'un convexe \mathcal{C} . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) le point M est extrémal,
- 2) le point M n'est pas contenu dans un segment d'extrémités dans \mathcal{C} et distinctes de M ;
- 3) le point M n'est pas combinaison convexe de points de \mathcal{C} distincts de M ;
- 4) L'ensemble $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ est convexe

Exemple 35 Les points extrémaux du simplexe

$$S = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$$

sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Proposition 36 ♠ Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ ♠

Soit E espace euclidien. Les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ sont les éléments de $\mathcal{O}(E)$.

Questions

Exercice : Montrer que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Solution : "L'enveloppe convexe d'un compact est compacte" est souvent appelé "Théorème de Carathéodory". Or ici, on va rappeler ce que l'on entend par "Théorème de Carathéodory" :

" Si $\dim E = n$ alors tout point de l'enveloppe convexe de \mathcal{A} est barycentre à coefficients positifs de moins de $n + 1$ points de \mathcal{A} ."

Cela va nous être utile pour répondre à la question. En effet, considérons \mathcal{A} un compact dans un espace affine \mathcal{E} et :

$$K = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \mid \lambda_i \in [0, 1] \forall i \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$$

K est un compact (c'est un fermé borné dans \mathbb{R}^{n+1}).

Posons

$$f : K \times \mathcal{A}^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), (A_1, \dots, A_{n+1})) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i$$

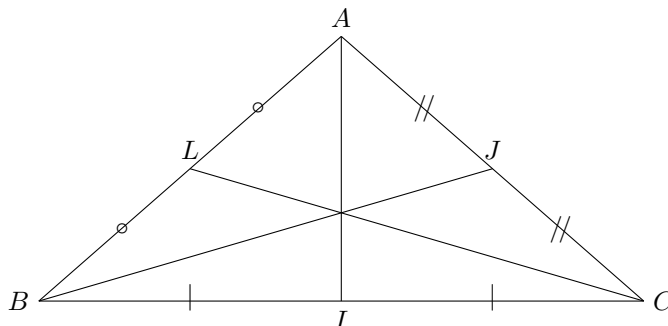
Comme $K \times \mathcal{A}^{n+1}$ est compact (comme produit de compacts), f est continue (en posant un repère, on peut donner un argument de continuité sur les coordonnées par exemple) et que $\text{Im} f = \text{conv}(\mathcal{A})$, on en déduit que $\text{conv}(\mathcal{A})$ (car l'image d'un compact par une application continue est compacte).

Exercice : 1) Quelles sont les coordonnées barycentriques du centre de gravité d'un triangle ABC . Expliquer également pourquoi les médianes sont concourantes.

2) Quelles sont les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit d'un triangle ABC .

Solution : 1) Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC . Par définition du centre de gravité, les coordonnées barycentriques de G sont $(1, 1, 1)$.

G est le point de concours des médianes du triangle ABC . C'est l'associativité du barycentre qui permet de répondre à la question.



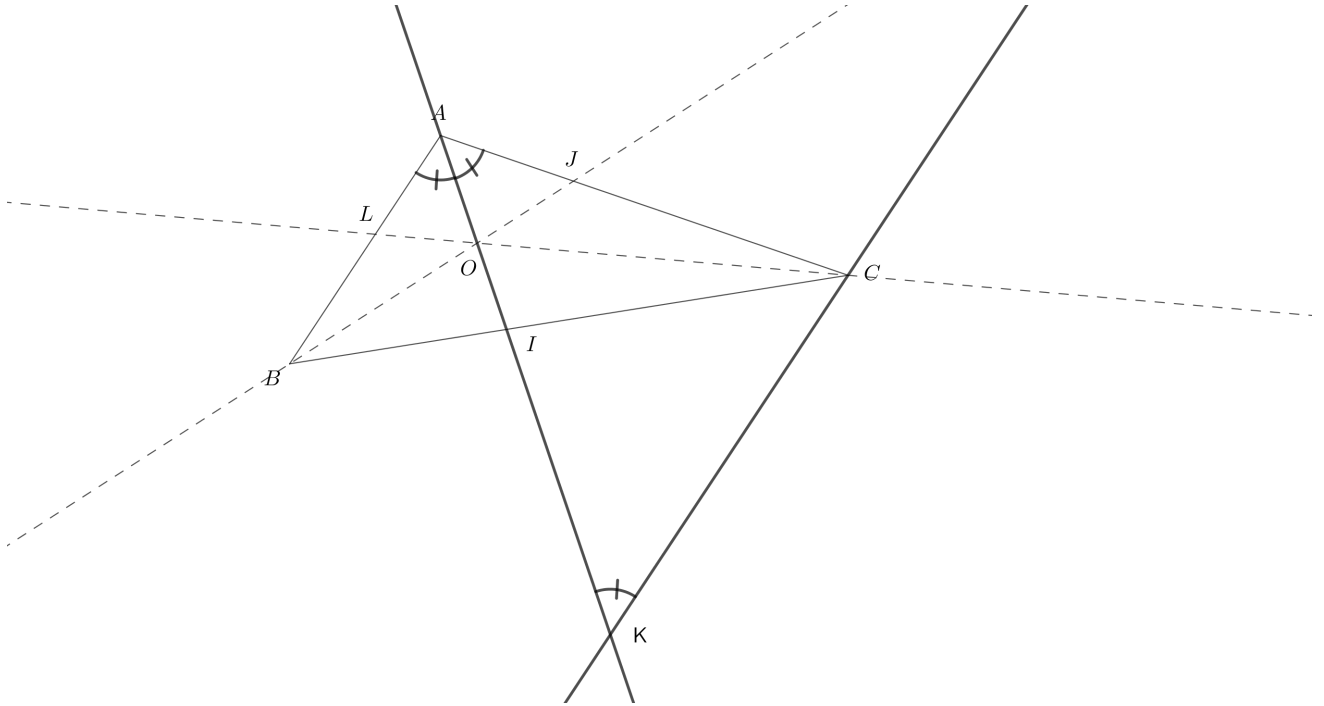
En effet, comme G est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$, par associativité, il est également le barycentre de $\{(A, 1); (I, 2)\}$. Donc $G \in (AI)$. On en déduit de même que $G \in (BJ)$ ET $G \in (CK)$. Donc les médianes sont concourantes en G .

2) Soit O centre du cercle inscrit d'un triangle ABC . O est le point de concours des bissectrices du

triangle ABC . On pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$.

Montrons que $\frac{IC}{IB} = \frac{AC}{AB}$: Sur la figure, on a tracé la parallèle à (AB) passant par C . On note K le point d'intersection de cette droite avec la droite (AI) . Le théorème de Thalès nous dit donc que

$$\frac{IC}{IB} = \frac{CK}{AB}$$



On a donc $\widehat{CKI} = \widehat{IAB} = \widehat{CAI}$. Ainsi le triangle CKA est isocèle en C , et donc $CK = CA$. On en déduit donc que

$$\frac{IC}{IB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Vectoriellement, on obtient

$$\vec{IC} = -\frac{b}{c}\vec{IB} \Leftrightarrow b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$$

Donc I a pour coordonnées barycentriques $(0, b, c)$. On en déduit de même pour $J = (a, 0, c)$ et $K = (a, b, 0)$

En posant $O = (a, b, c)$ et en se rappelant que O est le point de concours des bissectrices du triangle ABC , on a bien :

$$\text{bar}\{(A, a); (I, b + c)\} = \text{bar}\{(B, b); (J, a + c)\} = \text{bar}\{(C, c); (L, a + b)\}$$

.

Exercice : Soient A, B deux points distincts du plan \mathcal{P} , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrire, en fonction de λ , l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{P} \mid AM^2 = \lambda BM^2\}$$

Solution : Pour commencer, regardons quelques cas triviaux :

- Si $\lambda < 0$, alors $\mathcal{A} = \emptyset$.
- Si $\lambda = 0$, alors $\mathcal{A} = \{A\}$.

- Si $\lambda = 1$, alors \mathcal{A} est la médiatrice du segment $[AB]$.
- Soit $\lambda > 0$ ($\lambda \neq 1$). Alors $\forall M \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} AM^2 = \lambda BM^2 &\Leftrightarrow AM^2 - \lambda BM^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow_{\lambda=\mu^2} AM^2 - \mu^2 BM^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \mu \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BM}) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi les vecteurs $(\overrightarrow{AM} - \mu \overrightarrow{BM})$ et $(\overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BM})$ sont perpendiculaires.
En écrivant

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} - \mu \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{G_1M} \text{ avec } G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, -\mu)\} \\ \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{G_2M} \text{ avec } G_2 = \text{bar}\{(A, 1); (B, \mu)\} \end{aligned}$$

On obtient que $\overrightarrow{G_1M} \cdot \overrightarrow{G_2M} = 0$ et on en déduit donc que \mathcal{A} est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

Exercice : On fixe n points A_1, \dots, A_n du plan \mathcal{P} et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ et $r \in \mathbb{R}$.
Décrire l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{P} \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i M^2 = r\}$$

Solution : Posons $G = \text{bar}\{(A_1, \lambda_1); \dots; (A_n, \lambda_n)\}$. On a donc

$$\begin{aligned} r = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i M^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{A_iM})^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i G^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_iG} \cdot \overrightarrow{GM}}_{\text{constante ind. de } M} + \sum_{i=1}^n \lambda_i GM^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_iG}}_{=\vec{0}} \cdot \overrightarrow{GM} + \sum_{i=1}^n \lambda_i GM^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$GM^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \left(r - \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i G^2 \right)$$

Par conséquent,

- Si $r < \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i G^2$, alors $\mathcal{A} = \emptyset$.
- Si $r = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i G^2$, alors $\mathcal{A} = \{G\}$.
- Si $r > \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i G^2$, alors \mathcal{A} est un cercle de centre G et de rayon $\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} (r - \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i G^2) \right)^{\frac{1}{2}}$.