Nombres de Bell

Mohamed NASSIRI

Référence :

Exercices de mathématiques : Oraux X-ENS, Algèbre 1, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas, p.14 →16

Recasage :

●●●●● 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
●●●●● 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
●●●●● 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
●●●●● Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Résumé :

Le nombre de Bell B_n nous donne le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Facilement calculable pour des petites valeurs de n, cela devient vite pénible pour $n = 5$ ($B_5 = 52...$). Ce développement propose, au moyen judicieux des séries entières, de donner une expression de B_n sous la forme d'une somme d'une série.

Prérequis :

Combinatoire - Séries entières - Produit de Cauchy

Théorème : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, avec par convention, $B_0 = 1$. Alors, on a

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Démonstration.
<u>*Starter :*</u> $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ et $B_3 = 5$.

<u>*Etape 1 - Partition de $[\![1, n+1]\!]$:*</u>

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on considère E_k l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$. On a

$$\mathrm{card} E_k = \binom{n}{k} B_{n-k}$$

En effet, pour constituer la partie contenant $n+1$, il faut choisir k éléments de $[\![1,n]\!]$, puis il faut réaliser une partition des $n-k$ éléments restants. Par ailleurs, comme E_0, E_1,..., E_n forment une partition de $[\![1,n+1]\!]$, on obtient donc

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card} E_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \underbrace{=}_{j=n-k} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j \qquad (\dagger)$$

Etape 2 - Montrons que le rayon de convergence de la série $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ n'est pas nul et que $f(z) = e^{e^z - 1}$:

→ Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $B_n \leq n!$. Cette proposition est vraie pour $n \leq 3$. Supposons qu'elle est vraie jusqu'au rang n et montrons là au rang $n+1$.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq (n+1)!$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{B_n}{n!} \leq 1$ et le rayon de convergence R de la série entière est supérieur ou égal à 1.

→ Pour $z \in]-R, R[$, on a $(\dagger)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$$

La fonction f est dérivable pour $z \in]-R, R[$, et on a

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n$$

On reconnait le produit de Cauchy des séries $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$. La première a pour somme $f(z)$ et la seconde e^z et ont un rayon de convergence supérieur ou égal à R. On a donc, pour tout $z \in]-R, R[$

$$f'(z) = f(z) e^z$$

On en déduit donc qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in]-R, R[$, $f(z) = Ce^{e^z}$. Or, comme $f(0) = B_0 = 1$, on a donc $C = \frac{1}{C}$. Donc, pour tout $z \in]-R, R[$,

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}$$

Etape 3 - Expression de B_n :

La série entière de la fonction exponentielle ayant un rayon de convergence infini, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

On aimerait pouvoir intervertir les symboles $\sum$. Il faut s'assurer de la sommabilité de la série double de terme général $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$.
On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{n!k!} = \frac{e^{|nz|}}{n!}$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nz|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|z|})^n}{n!} = e^{e^{|z|}}$$

La série double est donc sommable, on peut ainsi intervertir les symboles $\sum$. On a donc

$$f(z) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\right)\frac{z^k}{k!}$$

Or, par définition, $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$ et donc par unicité du développement en série entière, on a

$$B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}$$

□

Remarques :

- **Exemples d'ensembles E_k :**
  On rappelle que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, E_k est l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$.
  Pour illustrer notre propos, nous allons faire les cas $n = 2$ et $n = 3$ (on rappelle que $B_5 = 52$ ...). Le cas $n = 2$ n'étant pas assez "illustratif", le cas $n = 3$ sera plus "fourni en E_k".

  $\underline{n = 2 :}$ Pour déterminer les E_k, on regarde donc les partitions de $[\![1, 2+1]\!] = [\![1, 3]\!]$. On obtient

  $$\underbrace{\{1,2,3\}}_{\in E_2} \quad \underbrace{\{1,2\}\cup\{3\}}_{\in E_0} \quad \underbrace{\{1,3\}\cup\{2\}}_{\in E_1} \quad \underbrace{\{2,3\}\cup\{1\}}_{\in E_1} \quad \underbrace{\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}}_{\in E_0}$$

  $\underline{n = 3 :}$ Pour déterminer les E_k, on regarde cette fis-ci les partitions de $[\![1, 3+1]\!] = [\![1, 4]\!]$. On obtient

  $$\underbrace{\{1,2,3,4\}}_{\in E_3} \quad \underbrace{\{1,2,3\}\cup\{4\}}_{\in E_0} \quad \underbrace{\{1,2,4\}\cup\{3\}}_{\in E_2} \quad \underbrace{\{2,3,4\}\cup\{1\}}_{\in E_2} \quad \underbrace{\{1,3,4\}\cup\{2\}}_{\in E_2}$$

  $$\underbrace{\{1,2\}\cup\{3,4\}}_{\in E_1} \quad \underbrace{\{1,3\}\cup\{2,4\}}_{\in E_1} \quad \underbrace{\{1,4\}\cup\{2,3\}}_{\in E_1}$$

  $$\underbrace{\{1\}\cup\{2\}\cup\{3,4\}}_{\in E_1} \quad \underbrace{\{1\}\cup\{3\}\cup\{2,4\}}_{\in E_1} \quad \underbrace{\{1\}\cup\{4\}\cup\{2,3\}}_{\in E_0} \quad \underbrace{\{2\}\cup\{3\}\cup\{1,4\}}_{\in E_1}$$

  $$\underbrace{\{3\}\cup\{4\}\cup\{1,2\}}_{\in E_0} \quad \underbrace{\{2\}\cup\{4\}\cup\{1,3\}}_{\in E_0} \quad \underbrace{\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}}_{\in E_0}$$

  Une grande inspiration et un petit moment de réflexion permet de se convaincre de la proposition :

  Pour constituer la partie contenant $n+1$, il faut choisir k éléments de $[\![1, n]\!]$, puis il faut réaliser une partition des $n-k$ éléments restants.

- **Quelques premiers termes de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

  $$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5, \quad B_4 = 15, \quad B_5 = 52, \quad B_6 = 203, \quad B_7 = 877 \ \ ...$$

  Le premier vaut 1 car il existe exactement une partition de l'ensemble vide : la partition vide, formée d'aucune partie. En effet, ses éléments (puisqu'il n'y en a aucun) sont bien non vides et disjoints deux à deux, et de réunion vide.

- **La relation d'Aitken :** La relation de récurrence (†) est parfois nommée *relation d'Aitken.*
- **Nombres de Bell premiers :** Les sept plus petits nombres de Bell premiers sont :

$$B_2 = 2, B_3 = 5, B_7 = 877, B_{13} = 27644437$$

$$B_{42} = 35742549198872617291353508656626642567,$$

$$B_{55} = 359334085968622831041960188598043661065388726959079837 \quad \text{et} \quad B_{2841}$$

On ignore s'il en existe d'autres ...

- **Nombres de dérangement du groupe $\mathfrak{S}_n$:**
On a le résultat suivant, très proche des nombres de Bell, au niveau de sa démonstration.

> **Théorème :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *dérangement du groupe* $\mathfrak{S}_n$ tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant
>
> $$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \sigma(k) \neq k$$
>
> En notant d_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (convention $d_0 = 1$), on a
>
> $$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Démonstration :
Etape 1 - Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k = n!$:

Pour $n = 0$, le résultat est évident. Soit n un entier strictement positif. Pour tout entier k compris entre 0 et n, on note I_k le nombre de permutations de $\{1, ..., n\}$ ayant exactement k éléments non invariants. Pour construire une telle permutation, il faut choisir k éléments non invariants. Donc C_n^k possibilités. Il faut ensuite construire un dérangement restreint à ces k éléments. Donc d_k possibilités. Ainsi,

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \ I_k = C_n^k d_k$$

Par suite,

$$|\mathfrak{S}_n| = n! = \sum_{k=0}^{n} I_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k$$

Etape 2 - Montrons que le rayon de convergence de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ n'est pas nul et que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$:

$\rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ est inférieur au cardinal de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{d_n}{n!} \leq 1$$

Ainsi, la suite $(\frac{d_n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

$\rightarrow$ Les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En notant c_n le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy des deux séries, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k = 1$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad e^x f(x) &= \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

Etape 3 - Expression de d_n :

En utilisant à nouveau les propriétés du produit de Cauchy, on a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$\square$