Utilisation de la notion de compacité.

Mohamed NASSIRI

Concernant la compacité, on a deux points de vue équivalents : Borel-Lebesgue (*de tout recouvrement d'un ensemble E par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini*) vs Bolzano-Weierstrass (*de toute suite de points de E, on peut en extraire une sous-suite convergente dans E*).

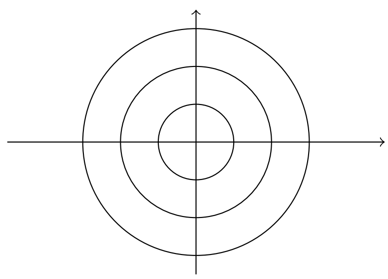
Dans les études de fonctions, la compacité joue un rôle important ! A l'instar de la connexité (et à l'inverse des ouverts et des fermés), la compacité a également la fâcheuse tendance à mal se comporter avec l'image réciproque par une application continue. Par exemple, on a

$$\sin^{-1}(\underbrace{[-1,1]}_{compact}) = \underbrace{\mathbb{R}}_{pas\ compact}$$

Cependant, on a que l'image directe par une application continue d'un compact est compacte (qui généralise un résultat connu dans $\mathbb{R}$: *toute application continue envoie un intervalle sur un intervalle*). Nous allons également retrouver plusieurs théorèmes très célèbres : théorème de Rolle, des accroissements finis, de Darboux, de Heine, etc.

Grâce à la compacité, on a également une caractérisation importante de la finitude de la dimension d'un espace vectoriel normé : le théorème de Riesz.

Pour l'analyse complexe, nous avons besoin de la notion de *suite exhaustive de compacts* qui nous donnera une topologie de convergence uniforme sur tout compact. L'idée est de remplir l'ouvert $\mathcal{U}$ sur lequel on travaille par des compacts qui "s'emboitent". On ne peut pas éviter cette construction au sein de l'espace des fonctions holomorphes car on peut montrer que ce dernier n'est pas normable ... Dans cette partie, on retrouvera notamment le principe des zéros isolés et le prolongement de la fonction Γ d'Euler sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$.



$\mathcal{U} = \mathbb{C}$, $K_n = D(0,n)$

Les problèmes de point fixe et de minimisation trouvent une solution notamment grâce à la compacité. Une application aux fonctionnelles quadratiques permet de résoudre à la célèbre équation $Ax = b$.

Du côté de l'algèbre, la compacité du groupe $O_n(\mathbb{R})$ nous permet d'obtenir de célèbres résultats : la décomposition polaire, l'homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, etc.

Références

[ROM] Elements d'analyse réelle, Jean-Etienne Rombaldi
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone ♠
[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas ♠
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[POM] Cours d'analyse : Agrégation de mathématiques, Alain Pommelet
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠
[HMQUE] Analyse complexe et applications, Martine Queffélec et Hervé Queffélec ♠
[HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Bertrand Hauchecorne
[FGNag3] Algèbre 3 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements
Décomposition polaire OU Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$
Principe des zéros isolés
Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$

1 Borel-Lebesgue vs Bolzano-Weierstrass [GOUan] p.27 → 30

1.1 Par Borel-Lebesgue

Définition 1 *Un espace métrique (E,d) est dit compact si de tout recouvrement de E par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, si $E=\cap_{i\in I}O_i$ avec O_i ouvert pour tout i, il existe $J\subset I$, J fini, tel que $E=\cap_{i\in J}O_i$.*

Exemple 2 - *Tout espace métrique fini est compacte.*
- *$\mathbb{R}$ n'est pas compact.*

Proposition 3 *Un espace métrique compact est borné.*

Proposition 4 *Un espace métrique (E,d) est dit compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E, on peut en extraire une sous famille finie d'intersection vide.*

Proposition 5 *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vide dans un compact E, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n\neq\varnothing$*

Proposition 6 *Soit (E,d) un espace métrique. Une partie $A\subset E$ est compact si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.*

Proposition 7 *(i) Une réunion finie de parties compactes est compacte.*
(ii) Une intersection de compacts est compacte.

1.2 Par Bolzano-Weierstrass

Théorème 8 *Théorème de Bolzano-Weierstrass*
Un espace métrique (E,d) est compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut en extraire une sous-suite convergente dans E.

Corollaire 9 *Un espace métrique (E,d) est compact si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*
- Toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence dans E.
Toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation dans E.

2 Continuité et compacité

2.1 Compacité et extrema

Proposition 10 *Soient (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique, et une application continue $f:E\to F$. Alors $f(E)$ est compact.* **[GOUan] p.31**

Remarque 11 *La réciproque est fausse !*

$$\sin^{-1}(\underbrace{[-1,1]}_{compact})=\underbrace{\mathbb{R}}_{pas\ compact}$$

Proposition 12 *Soit $f:(E,d)\to(F,\delta)$ une application continue et bijective. Si (E,d) est compact, alors $f^{-1}:F\to E$ est continue.* **[GOUan] p.31**

Proposition 13 *Soit $f:(E,d)\to\mathbb{R}$ une application continue, avec (E,d) compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.* **[GOUan] p.31**

Théorème 14 *Théorème de Rolle*
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ avec $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. **[ROM] p.137**

Théorème 15 *Théorème des accroissements finis*
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. **[ROM] p.151**

Remarque 16 *Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements sont faux dans $\mathbb{C}$*

Corollaire 17 *Inégalité des accroissements finis*
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. S'il existe $M>0$ telle que $f'(x)\leq M$ $\forall x\in]a,b[$, alors $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$. **[ROM] p.152**

Application 18 *Sens de variation d'une fonction :*
Si $f:I\to\mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors f est croissante sur I si, et seulement si, $f'(x)\geq 0$ pour tout x dans I. **[ROM] p.154-155**

Application 19 Limite et dérivation
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[\setminus\{c\}$, où c est un point de $]a,b[$. Si la fonction dérivée f' a une limite l en c, alors f est dérivable en c avec $f'(c) = l$. **[ROM] p.157**

Application 20 *(du théorème de Rolle)*
Théorème de Darboux
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors sa fonction dérivée f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. **[ROM] p.140**

Application 21 *(du théorème de Rolle)*
Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $x_0, ...x_n$ $n+1$ points distincts de $[a,b]$, et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, ...x_n$. On pose $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.
Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\zeta_x \in [a,b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_n(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

[ROM] p.143

2.2 Théorème de Heine

Théorème 22 Théorème de Heine
Toute fonction f définie sur un intervalle réel fermé borné $[a,b]$ et continue, est uniformément continue sur $[a,b]$. **[ROM] p.51**

Proposition 23 *Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ périodique, et à valeurs réelles est uniformément continue.* **[ROM] p.52-53**

3 Compacité dans les espaces vectoriels normés [GOUan] p.50 $\to$

Théorème 24 *Dans un e.v.n. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 25 *Toute application linéaire d'un e.v.n. de dimension finie dans un e.v.n. (quelconque) est continue.*

Corollaire 26 *Tout e.v.n. de dimension finie est complet*

Corollaire 27 *Tout s.e.v. de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.*

Corollaire 28 *Les parties compactes d'un e.v.n. de dimension finie sont les parties fermées bornées.*

Théorème 29 Théorème de Riesz
E est un $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension finie si et seulement si $\overline{\mathcal{B}_E(0,1)}$ est compacte.

Exemple 30 Partie fermée bornée non compacte
Soit $\mathbb{R}[X]$ l'e.v. des polynômes à coefficients réels et pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on pose la norme $||.||$ définie par

$$||P|| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

La boule unité fermé $\mathcal{B} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid ||P|| \leq 1\}$ est bien sûr fermée et bornée mais n'est pas compacte ! **[HAU] p.326**

4 Applications à la résolution d'équations

4.1 Points fixes

Proposition 31 *Soient (E,d) un espace métrique compact et une application continue $f : E \to E$ telle que*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y, \quad \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x,y)$$

Alors f admet un unique point fixe. **[GOUan] p.34**

Proposition 32 *Soient K un compact convexe d'un e.v.n. et une application continue $f : K \to K$ telle que*

$$\forall (x,y) \in K^2, \quad ||(f(x) - f(y))|| \leq ||x - y||$$

Alors f admet un unique point fixe. **[GOUan] p.52**

4.2 Problèmes de minimisation [FILB] p.134 $\to$ 140

Définition 33 *Soient $f \in C^0(E,\mathbb{R})$ et E un $\mathbb{R}$-e.v.n. On dit que $\overline{x} \in E$ est un minimum global de f si*

$$f(\overline{x}) = \min_{x\in E} f(x) \qquad (\dagger)$$

Proposition 34 Existence d'un minimum en dimension finie
Soient E un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une application telle que :
(i) f soit continue,
(ii) $f(x) \to +\infty$ lorsque $||x|| \to +\infty$
Alors il existe $\overline{x} \in E$ solution de $(\dagger)$.

Proposition 35 Condition suffisante d'unicité
Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. et $f : E \to \mathbb{R}$ une application convexe, alors il existe au plus $\overline{x} \in E$ solution de $(\dagger)$.

Théorème 36 Existence et unicité
Soient E un espace de Hilbert et $f : E \to \mathbb{R}$ une application telle que :
(i) f soit continue,
(ii) $f(x) \to +\infty$ lorsque $||x|| \to +\infty$
(iii) f soit strictement convexe,
Alors il existe un unique $\overline{x} \in E$ solution de $(\dagger)$.

Application 37 *Les fonctionnelles quadratiques*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{2}{}^t xAx - {}^t bx$$

Alors il existe un unique $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\overline{x}) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ qui est aussi la solution du système $Ax = b$.

5 Applications à l'analyse complexe : les suites exhaustives de compacts [ML3an] p.492 → 499

Définition 38 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite exhaustive si :*
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, et
(ii) $\cup_{n\geq 0} K_n = \mathcal{U}$.

Exemple 39 • *Si $\mathcal{U}$ est borné, la suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$K_n = \{z \in \mathcal{U} \mid \mathrm{d}(z, {}^c\mathcal{U}) \geq 1/n\}$$

est exhaustive.
• *Si $\mathcal{U}$ n'est pas borné, on intersecte la suite précédente avec les disques $D(0, 1/n)$. Ainsi, la suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$K_n = \{z \in \mathcal{U} \mid \sup\{|z|, 1/\mathrm{d}(z, {}^c\mathcal{U})\} \leq n\}$$

est exhaustive.

Application 40 ♠ *Principe des zéros isolés* ♠
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.
(1) *Si $a \in Z(f)$, $\exists\, k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :*

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \quad \text{avec } g(a) \neq 0$$

(2) *$Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω* **[HMQUE] p.102-103**

Définition 41 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tout compact K de $\mathcal{U}$, l'application*

$$||.||_K : C(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}_+$$
$$f \mapsto ||f||_K = \sup_{z\in K} |f(z)|$$

est une semi-norme sur l'espace des fonctions conutinues $C(\mathcal{U})$.

Proposition 42 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{U}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions conutinues sur $\mathcal{U}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f.
(ii) Pour tout compact K de $\mathcal{U}$, $||f_n - f||_K$ tend vers 0.
(iii) Pour tout p fixé, $||f_n - f||_{K_p}$ tend vers 0.

Définition 43 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$. On dit que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{U}$ si, pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$:*
(i) il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K,
(ii) la série $\sum_{n\geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.

Proposition 44 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$ telle que :*
(i) pour tout compact K de $\mathcal{U}$, il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K,
(ii) la série $\sum_{n\geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.
Alors la somme de la série $\sum f_n$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$.

Application 45 ♠ *Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$* ♠
La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs.

6 Applications à l'algèbre : le groupe orthogonal

Définition-Proposition 46 *L'ensemble*

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A^tA = I_n\}$$

vérifie les propriétés suivantes :
(i) si $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in O_n(\mathbb{R})$
(ii) $I_n \in O_n(\mathbb{R})$
(iii) si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$
En particulier, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, dit groupe orthogonal. **[GRI] p.240**

Proposition 47 *$O_n(\mathbb{R})$ est compact.* **[ML3al] p.328**

Théorème 48 ♠ *Décomposition polaire* ♠
On a les homéomorphismes suivants :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (O,S) \mapsto OS$$

$$\mathrm{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ (U,H) \mapsto UH$$

[H2G2t1] p.202

Corollaire 49 ♠ *Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$*
♠ *Soit E un espace euclidien et $B = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid |||f||| \leq 1\}$, alors les points extrémaux de B sont les éléments de $O(E)$.* **[FGNag3] p.130-131**

Théorème 50 ♠ *Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$* ♠
• *L'application* $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*
• *L'application* $\exp : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n^{++}$ *est un homéomorphisme.* **[H2G2t1] p.208-209**

Questions

Exercice : Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, A une partie de E et $f\ :\ E\to F$ une application continue.
1) Si $f^{-1}(A)$ est compact, a-t-on A compact ?
2) Si A est compact, a-t-on $f^{-1}(A)$ compact ?
3) Si $f(A)$ est compact, a-t-on A compact ?

Solution : 1) La réponse est non. En considérant la fonction $f\ :\ x\mapsto x^2$, on a

$$f^{-1}(\ \underbrace{]-\infty,1]}_{pas\ compact}\ )=\underbrace{[-1,1]}_{compact}$$

2) La réponse est encore non. En considérant la fonction sin, on a

$$\sin^{-1}(\underbrace{[-1,1]}_{compact})=\underbrace{\mathbb{R}}_{pas\ compact}$$

2) La réponse est toujours non. En considérant la fonction constante $f\ :\ x\mapsto c$, (pour une constance $c\in\mathbb{R}$), on a

$$f(\underbrace{\mathbb{R}}_{pas\ compact})=\underbrace{c}_{compact}$$

Exercice : Soient (E,d), un espace métrique compact et $\mathcal{I}$ un idéal propre de l'anneau $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $x\in E$ tel que, quelque soit $f\in\mathcal{I}$, $f(x)=0$.

Solution : Comme $\mathcal{I}$ est propre, $1\notin\mathcal{I}$. Supposons que pour tout $x\in E$, il existe $f_x\in\mathcal{I}$ telle que $f_x(x)\neq 0$. Par continuité de f_x, il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x tel que f_x ne s'annule pas sur $\mathcal{V}_x$.
Par suite, la famille $(\mathcal{V}_x)_{x\in E}$ est un recouvrement de E (qui est compact) dont on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\mathcal{V}_{x_1},...,\mathcal{V}_{x_n}$.
Par conséquent, la fonction $f=f_{x_1}^2+f_{x_n}^2\in\mathcal{I}$ est strictement positive sur tous les $\mathcal{V}_{x_i}$, donc sur E. De plus, comme $\frac{1}{f}\in\mathcal{I}$, on en déduit que $1=f\times\frac{1}{f}\in\mathcal{I}$. Absurde !

Exercice : Soit $n\geq 2$.
1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact.
2) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution : 1) L'application

$$\begin{aligned}\det\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R})&\to\mathbb{R}\\ M&\mapsto \det M\end{aligned}$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle norme), et comme $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (comme image réciproque d'un ouvert par une application continue).

Par suite, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est fermé (comme complémentaire d'un ouvert).
Pour $p \in \mathbb{N}$, la suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies par

$$A_p = p\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est une suite non bornée d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compacte.

2)L'application

$$\begin{aligned} t\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto^t MM \end{aligned}$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle norme), et comme $\{I_n\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $O_n(\mathbb{R}) = t^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (comme image réciproque d'un fermé par une application continue).
Montrons que On(R) est borné. Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $|m_{i,j}| \leq 1\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et donc $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $||M||_\infty \leq 1$. Ainsi, $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est de dimension finie...), donc $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.