

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Mohamed NASSIRI

INTRO

Prenons notre bon vieux produit scalaire et sa norme associée sur \mathbb{R}^3 pour visualiser. On a, pour $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\varphi(x, y) := \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad \text{et} \quad q(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

On sait ce que veut dire "orthogonal selon \langle, \rangle " notamment et surtout, on a la propriété remarquable suivante : si $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. On parle de caractère "défini" pour q . On aimerait faire une généralisation. Par exemple, dans le cadre de la théorie de la Relativité restreinte (on a une dimension en plus : le temps) on parle d'espace-temps donc on peut l'identifier à \mathbb{R}^4 . Dans cet espace, on définit la forme bilinéaire symétrique, et donc la forme quadratique, suivantes :

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 \quad \text{et} \quad q(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

Petit (ou gros ?) problème, on a perdu le caractère défini de q : en effet, il existe bien des vecteurs non nuls tels que leur "norme" soit nulle (exemple : $(0, 0, 1, 1)$). Du coup, "normaliser" un vecteur ne sera pas aussi facile (on risque de diviser par 0 ...). Autre problème : l'orthogonalité. On peut oublier la notion intuitive que l'on a de l'orthogonalité (géométrique, euclidienne) ! Par exemple, notre vecteur de tout à l'heure $(0, 0, 1, 1)$ est orthogonal à lui-même ... Ce qui n'est pas le cas dans le cadre "que l'on connaît" ... Tout ça, nous pousse donc à définir une nouvelle notion de l'orthogonal et de l'isotropie.

On a un résultat remarquable : le lemme de Morse. Il nous dit que $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (une fonction de classe C^3 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n contenant l'origine) est une application quadratique, à un difféomorphisme local près, dès que sa hessienne en 0 est non dégénérée.

Une des applications intéressantes des formes quadratiques réelles sont les coniques et les quadriques. Leur classification est entièrement déterminée par la signature d'une certaine forme quadratique intervenant dans l'équation de la conique et de la quadrique.

Références

- [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
- [GOUag] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
- [ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
- [ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠

Développements

- Lemme de Morse
- Critère de Sylvester

Dans cette leçon K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E est un K -e.v., et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Formes quadratiques

1.1 Formes bilinéaires symétriques [GOUag] p.227-228

Définition 1 Soit E un \mathbb{K} -e.v. et une application

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

On dit que φ est une forme bilinéaire si :

- (i) pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x, \cdot) : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, et

(ii) pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\cdot, y) : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Exemple 2 L'application $\varphi : C^0([0, 1], \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})^2$.

Proposition 3 Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors la matrice $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée matrice de φ dans la base B .

L'application qui à φ associe sa matrice M dans une base fixée de E est un isomorphisme.

Proposition 4 Soient B et B' deux bases de E , et P la matrice de passage de B à B' . Si φ est une forme bilinéaire sur E , et si M désigne sa matrice dans la B , M' dans la base B' , alors

$$M' = {}^t P M P$$

Définition 5 Le rang de φ est le rang de M .

Définition 6 Soit φ une forme bilinéaire sur E . On dit que φ est symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

Proposition 7 Soit B une base de E . Une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si, et seulement si sa matrice dans la base B est symétrique.

1.2 Formes quadratiques [GOUag] p.229-230

Définition 8 On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme

$$q : E \rightarrow K, x \mapsto \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .

Proposition 9 Soit q une forme quadratique sur E . Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de q et on a

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\ &= \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)] \end{aligned}$$

Exemple 10 L'application

$$q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Tr}(A^2)$$

est une forme quadratique de forme polaire

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$$

Définition 11 Soient q une forme quadratique sur E et B une base de E .

On appelle matrice de q dans la base B la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B , et le rang de q le rang de cette matrice.

Exemple 12 On se place dans \mathbb{R}^3 et on y définit la forme quadratique q par

$$u = (x, y, z) \mapsto q(u) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$$

Alors la matrice de q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Orthogonalité et isotropie

2.1 Définitions et premières propriétés [GOUag] p.230-231

Définition 13 On appelle cône isotrope de q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

On dit que q est définie si $C_q = \{0\}$.

Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $x \in C_q$.

Exemple 14 Soit \mathbb{R}^3 et $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. On a donc

$$C_q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Voir Figure 0.

Définition 15 On dit que q est définie positive si

$$q(x) \geq 0, \forall x \in E \quad \text{et} \quad q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

. [GRI] p.302

Définition 16 On dit que x et y de E sont orthogonaux selon q si $\varphi(x, y) = 0$.

Soit $A \subset E$, on appelle orthogonal de A selon q l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, \varphi(x, y) = 0\}$$

Deux ensembles A et B de E sont dits orthogonaux selon q si $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$, $\varphi(x, y) = 0$. On note $A \perp B$.

Proposition 17 • Si $A \subset B \subset E$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
 • Si $A \subset E$, alors $A^\perp = (\text{vect}A)^\perp$
 • Si $A \subset E$, alors $A \subset A^{\perp\perp}$

Définition 18 On appelle noyau de q le s.e.v de E noté $\text{Ker}q$ défini par

$$\text{Ker}q = E^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$$

q est dite non dégénérée si $\text{Ker}q = \{0\}$, dégénérée si $\text{Ker}q \neq \{0\}$.

Proposition 19 On a $\text{Ker}q \subset C_q$. En particulier, si q est définie, alors q est non dégénérée.

Remarque 20 La réciproque est fautive. Exemple : $q(x, y) = x^2 - y^2$ est non dégénérée mais n'est pas définie car pour tout x , $q(x, x) = q(x, -x) = 0$.

Proposition 21 Soit B une base de E . En identifiant les vecteurs de E et leur représentation en vecteurs colonne dans la base B , on a $\text{Ker}q = \text{Ker}A$, où A est la matrice de q dans la base B .

2.2 Bases q -orthogonales

Définition 22 Une base B de E est dite q -orthogonale si pour tout couple d'éléments distincts (e, e') de B , on a $\varphi(e, e') = 0$.

Remarque 23 Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base q -orthogonale de E , alors $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$,

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$$

Alors la matrice de q dans la base B est diagonale.

Théorème 24 Si E est de dimension finie, il existe une base q -orthogonale de E .

Corollaire 25 Soit $A \in M_n(K)$ symétrique. Alors il existe $P \in GL_n(K)$ telle que PAP^{-1} soit diagonale.

2.3 Méthode de Gauss

Remarque 26 Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base q -orthogonale de E , et $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. En posant $\lambda_i = q(e_i)$, on a, $\forall x \in E$,

$$q(x) = q\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i^*(x))^2$$

Donc q s'écrit comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Le calcul de ces formes linéaires est donnée par la méthode suivante. [GOUag] p.232

Méthode 27 Méthode de Gauss :

Exemple 28 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4yz$$

La méthode de Gauss donne

$$q(x, y, z) = (x + y)^2 + (y - 2z)^2 + z^2$$

[GRI] p.224 – 225

2.4 Propriétés des orthogonaux selon q

Proposition 29 Soit E un K -e.v. de dimension finie et F un s.e.v de E vérifie

- (i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \text{Ker}q)$
- (ii) $F^{\perp\perp} = F + \text{Ker}q$

Proposition 30 Soit F un s.e.v de dimension finie de E (mais E de dimension quelconque). Alors

- (i) Si la restriction $q|_F$ de q à F est définie, on a $F \oplus F^\perp = E$
- (ii) Si q est définie, on a $F = F^{\perp\perp}$

3 Réduction simultanée [GRI] p.313-314

Définition 31 On appelle espace euclidien, un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie muni d'un produit scalaire \langle, \rangle ((i.e.) une forme bilinéaire symétrique définie positive) [GRI] p.221

Théorème 32 Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et q une forme quadratique sur E . Il existe alors des bases orthogonales à la fois pour \langle, \rangle et pour q .

Corollaire 33 Soit q une forme quadratique sur E et $S = \text{Mat}_B(q)$ où B est une base quelconque. Alors :

- 1) On peut construire une base orthogonale de q formée de vecteurs propres de S .
- 2) De plus, $\text{sgn}(q) = (n_+, n_-)$, où n_+ = nombre de valeurs propres strictement positives de S , n_- = nombre de valeurs propres strictement négatives de S .

Exemple 34 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique \langle, \rangle . On considère

$$q(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 6xy + 6yz + 6xz$$

Les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthogonale à la fois pour \langle, \rangle et pour q .

4 Classification des formes quadratiques et hermitiennes

4.1 $K = \mathbb{C}$

Théorème 35 Soit q une forme quadratique sur E , un \mathbb{C} -e.v. Alors, il existe une base (e_i) telle que, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$$

c'est-à-dire

$$\text{Mat}(q)_{e_i} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

où $r = \text{rg} q$

4.2 $K = \mathbb{R}$

Théorème 36 Théorème de Sylvester Si E est un \mathbb{R} -e.v. et q une forme quadratique sur E , alors il existe une base (e_i) telle que, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

c'est-à-dire

$$\text{Mat}(q)_{e_i} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

où $r = \text{rg} q$, et p est entier (qui ne dépend que de q). Le couple $(p, r - p)$, noté $\text{sgn}(q)$, est dit signature de q .

Méthode 37 Méthode de Gauss pour permettre de déterminer la signature d'une forme quadratique ou hermitienne.

Exemple 38 • La forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$$

a pour signature $\text{sgn}(q) = (2, 1)$.

Proposition 39 Si E est un \mathbb{R} -e.v., et q une forme quadratique sur E . Alors :

$$q \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \text{sgn}(q) = (n, 0)$$

$$q \text{ est non dégénérée} \Leftrightarrow \text{sgn}(q) = (p, n - p)$$

4.3 $K = \mathbb{F}_q$

Théorème 40 Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2, et E un k -espace vectoriel de dimension n .

Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$. Il y a deux classes d'équivalences de formes quadratiques non dégénérées sur E , de matrices

$$Q_1 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

[PER] p.130

5 Applications

5.1 Conséquences sur les matrices définies positives

Définition 41 • Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est définie positive si pour tout $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, ${}^t X M X > 0$.

• $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M \text{ et } X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t X M X > 0\}$

• $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M \text{ et } X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t X M X \geq 0\}$

Proposition 42 Orthogonalisation simultanée

Soient M, N deux matrices symétriques, telles que M soit définie positive. Alors il existe une matrice C inversible telle que

$${}^t C M C = I \text{ et } {}^t C N C = D$$

où D est une matrice diagonale réelle. [GOUag] p.245

Théorème 43 Critère de Sylvester :

Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, on définit la matrice extraite

$M_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Alors

M est définie positive si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\det M_k > 0$. [GOUag] p.248

Application 44 La matrice $A = (\frac{1}{1+|i-j|})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique définie positive. [GOUag] p.248

Application 45 • $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un cône ouvert dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

• $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

5.2 Calcul différentielle : différentielle seconde [ML3an] p.700 → 702

Théorème 46 Théorème de Schwarz

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^n , une application deux fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Définition 47 Avec les mêmes notation, la matrice hessienne de f en a est donnée par :

$$Hf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque 48 Hf_a est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

Théorème 49 ♠ Lemme de Morse ♠

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n - p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u := \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans \mathbb{R}^n , de classe C^1 , tel que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

[ROU] p.354, p.210

5.3 Coniques et quadriques [GRI]
p.413 → 420

Définition 50 On appelle conique l'ensemble C des points $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation

$$\underbrace{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}_{:=q(x,y)} + \underbrace{2Dx + 2Ey + F}_{:=\varphi(x,y)} = 0$$

Théorème 51 Classification des coniques

Soit C une conique définie par l'équation $q(x, y) + \varphi(x, y) = 0$. On suppose que $C \neq \emptyset$ et que C n'est pas réduit à un point. Alors :

1. Si $\text{sgn}(q) = (2, 0)$, alors C est une ellipse.
2. Si $\text{sgn}(q) = (1, 1)$, alors C est une hyperbole qui éventuellement dégénère en deux droites non parallèles.
3. Si $\text{sgn}(q) = (1, 0)$, alors C est une parabole qui éventuellement dégénère en une droite, ou deux droites parallèles, si la direction principale isotrope est contenue dans $\text{Ker}\varphi$.

Définition 52 On appelle quadrique l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient l'équation

$$\underbrace{Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz}_{:=q(x,y,z)} + \underbrace{2Cx + 2C'y + 2C''z + D}_{:=\varphi(x,y,z)} = 0$$

Théorème 53 Classification des quadriques

Soit Q une quadrique définie par l'équation $q(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0$. On suppose que $Q \neq \emptyset$ et que Q n'est pas réduit à un point. Alors :

1. $\text{rg}(q) = 3$:
 - (a) Si $\text{sgn}(q) = (3, 0)$, alors Q est un ellipsoïde.
 - (b) Si $\text{sgn}(q) = (2, 1)$, alors Q est
 - un hyperboloïde à une nappe
 - un cône
 - un hyperboloïde à deux nappes
2. $\text{rg}(q) = 2$:
 - (a) Si $\text{sgn}(q) = (2, 0)$, alors Q est une parabololoïde elliptique ou un cylindre elliptique si la direction principale isotrope est contenue dans $\text{Ker}\varphi$.
 - (b) Si $\text{sgn}(q) = (1, 1)$, alors Q est une parabololoïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique si la direction principale isotrope est contenue dans $\text{Ker}\varphi$.
3. $\text{rg}(q) = 1$:

Q est une cylindre parabolique qui éventuellement dégénère en deux plans parallèles, si les deux directions principales isotropes est contenue dans $\text{Ker}\varphi$.

Illustrations

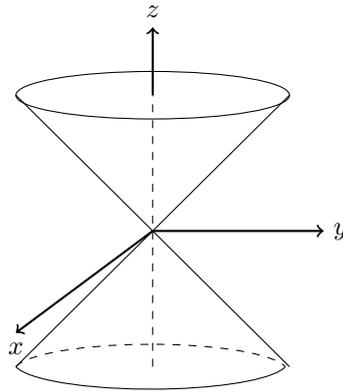


Figure 0 : $C_q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$

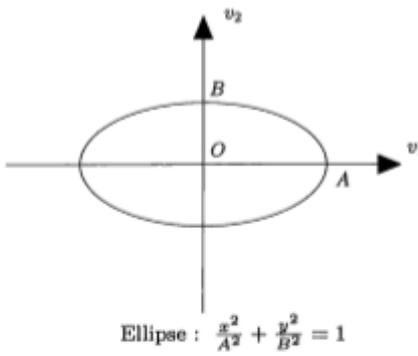


Figure 1

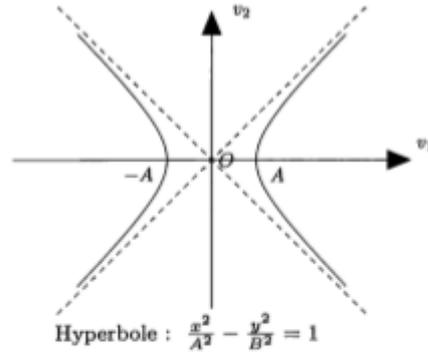


Figure 2

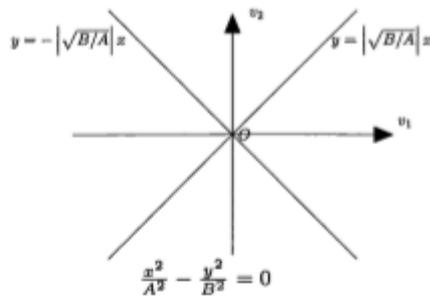


Figure 3

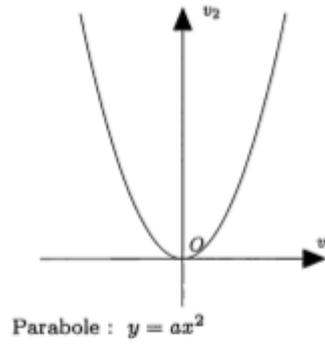
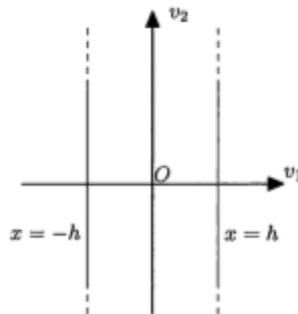
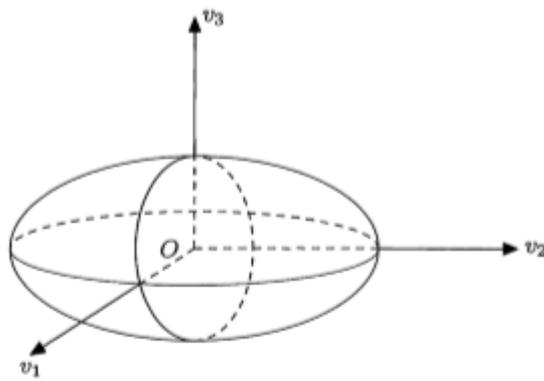


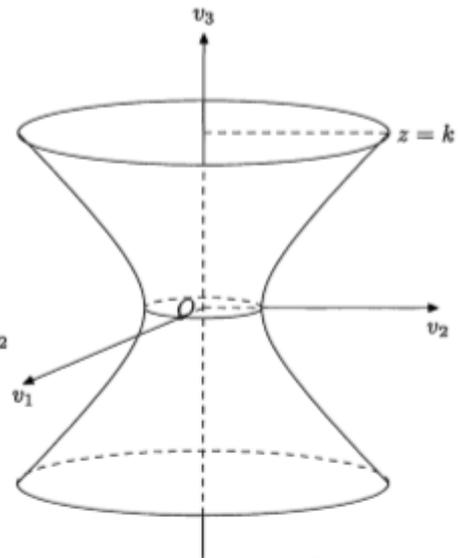
Figure 4



Illustrations de la classification des coniques, Joseph Grifone

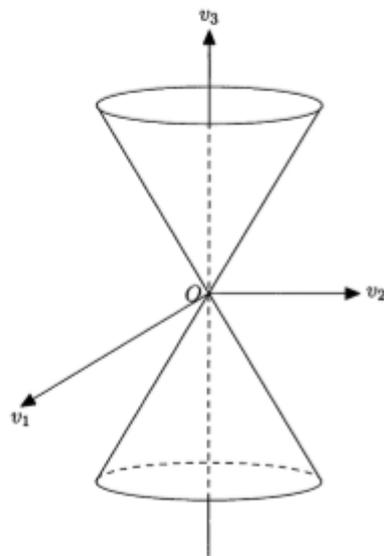


Ellipsoïde : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$



Hyperboloïde à une nappe : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$

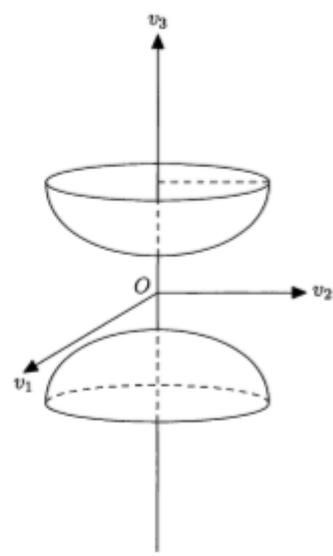
Figure 6



Cône : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$

Figure 8

Figure 7



Hyperboloïde à deux nappes :
 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$

Figure 9

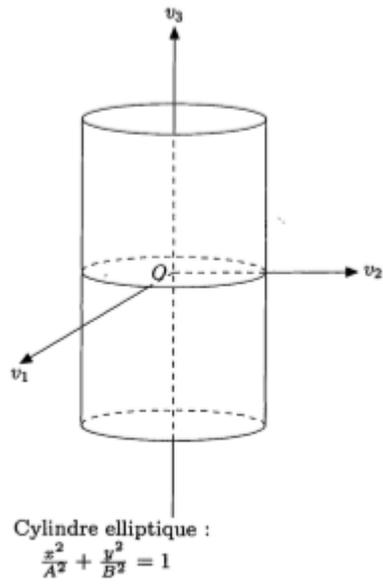


Figure 10

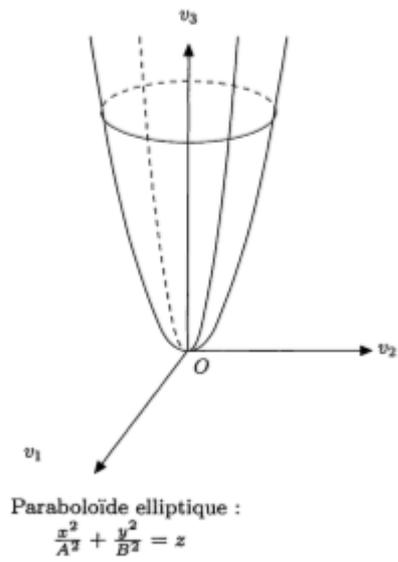


Figure 11

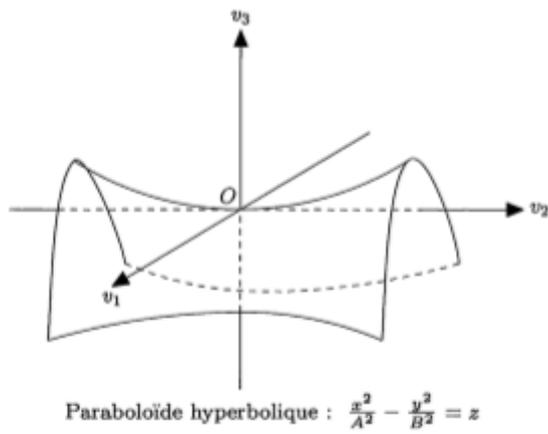


Figure 12

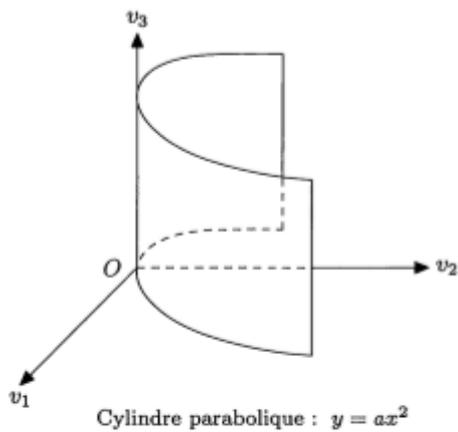


Figure 13

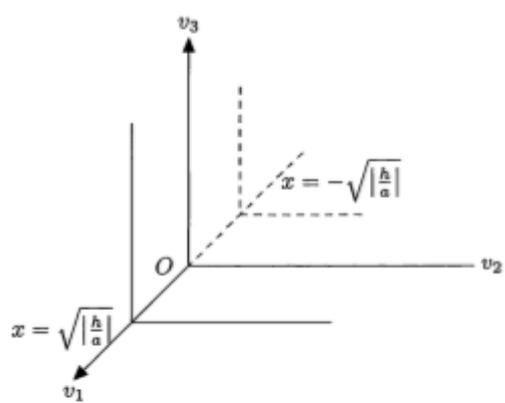


Figure 14

Illustrations de la classification des quadriques, Joseph Grifone

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

