Utilisation des groupes en géométrie.

Mohamed NASSIRI

INTRO

Nous savons déjà que les applications linéaires et affines ont des propriétés remarquables. On va s'intéresser à une classe d'applications linéaires : les isométries (elles conservent les distances).

Attention cependant à la nuance entre isométries vectorielles et affines. Par exemple, une rotation est une isométrie vectorielle et (donc) affine, cependant une translation est une isométrie affine mais pas vectorielle. Tout provient de la nuance dans la définition :

Une isométrie affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ est une application f de $\mathcal{E}$ dans lui-même conservant les distances (i.e.)

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}, \quad \mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M,N)$$

Une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel E est une application f de E dans lui-même conservant la norme (i.e.)

$$\forall x \in E, \quad ||f(x)|| = ||x||$$

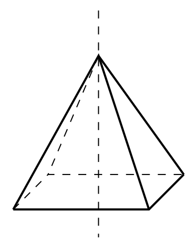
La différence entre les deux définitions provient notamment du fait que dans un espace vectoriel on a privilégié un point et pas dans l'espace affine.

L'étude des isométries affines va nous être simplifiée par un résultat de décomposition canonique de celles-ci. Plus précisement, pour toute isométrie f de $\mathcal{E}$, il existe un unique couple $(t_{\overrightarrow{u}}, f_0)$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et f_0 est une isométrie ayant un point fixe vérifiant

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ f_0 = f_0 \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

Ce résultat va nous permettre aussi de classifier les isométries en dimension 2 et 3.

D'autres isométries sont particulièrement intéressantes : celles qui préservent une partie. Par exemple, en considérant une pyramide $\mathcal{S}$ dont la base est un polygone régulier à n côtés (ici $n = 4$), les rotations d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe "hauteur" laissent invariant $\mathcal{S}$.



Ces isométries qui préservent une partie vont nous permettent de définir le groupe diédral (groupe des isométries du plan qui conservent un polygone régulier à n côtés), mais également nous donner des isomorphismes intéressants. Par exemple, en notant Δ_4 le tétraèdre régulier et $Is(\Delta_4)$ le groupe des isométries préservant Δ_4. On a alors l'isomorphisme

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

Cet isomorphisme nous permet notamment de remplir la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[GOUag] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[MER] Cours de géométrie, Dany-Jack Mercier
[BIA] Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne, Jean de Biasi

[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements
Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et les isométries du tétraèdre
$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

Dans toute la leçon, sauf mention contraire, $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (ou E) de dimension n.

1 Actions de groupe [ML3al] p.238 → 242

Dans cette leçon, G est un groupe et X un ensemble.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 *On dit que* <u>G *agit à gauche*</u> *(resp.* <u>*à droite*</u>*)* <u>*sur* X</u> *si on a une application*

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) \mapsto g.x \quad (\textit{resp. } x.g)$$

telle que
(i) $\forall x \in X,\ 1.x = x \quad (\textit{resp. } x.1 = x)$
(ii) $\forall (g, g') \in G^2,\ \forall x \in X,\ g.(g'.x) = gg'.x \quad (\textit{resp. } (x.g).g' = x.gg')$
On dit que l'action est <u>*fidèle*</u> *si*

$$(\forall x \in X,\ g.x = x) \Rightarrow g = 1$$

Elle est dite <u>*transitive*</u> *si*

$$(\forall x, y \in X, \exists g \in G \textit{ tel que } g.x = y)$$

Définition 2 *La relation*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G \textit{ tel que } g.x = y$$

est une relation d'équivalence et ses classes sont appelées <u>*orbites de G sous X*</u>*. L'orbite d'un élément* $x \in X$ *est noté* $\omega(x)$*.*

Définition 3 *Le* <u>*stabilisateur de* x</u>*, noté* $\mathrm{Stab}(x)$*, est le sous-groupe de* G *défini par*

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

On dit que x *est* <u>*un point fixe pour l'action de G*</u> *si* $\mathrm{Stab}(x) = G$*.*

Exemple 4 *Soit* G *un groupe (noté multiplicativement). La conjugaison :*

$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto g.h = ghg^{-1}$$

est une action de groupe.
Les orbites sont appelées <u>*classes de conjugaison*</u> *et le stabilisateur de* x *est appelé* <u>*centralisateur*</u> *(noté* $C_G(x)$*).*

Théorème 5 <u>*Théorème de Cayley*</u>
Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe de permutations.

1.2 Equation aux classes et formule de Burnside

Proposition 6 *Les orbites de* X *sous l'action de* G *forment une partition de* X *et il existe une bijection*

$$f_x \ :\ G\backslash\mathrm{Stab}(x) \to \omega(x)$$
$$g\mathrm{Stab}(x) \mapsto g.x$$

De plus, l'action induite sur $\omega(x)$ *est compatible avec l'action naturelle de* G *sur le quotient* $G\backslash\mathrm{Stab}(x)$ *dans le sens suivant :*

$$\forall \kappa \in G\backslash\mathrm{Stab}(x),\ \forall g \in G,\quad f_x(g\kappa) = g.f_x(\kappa)$$

Corollaire 7 *Si* G *et* X *sont finis, alors* $\mathrm{Card}(\omega(x))$ *divise* $|G|$*.*

Proposition 8 <u>*Equation aux classes*</u>
On a l'égalité

$$|G| = |Z(G)| + \sum_i \mathrm{Card}(\omega_i)$$

où la somme porte sur toutes les classes de conjugaison de cardinal strictement supérieur à 1.

Proposition 9 *On suppose que* G *est un p-groupe et que* X *est fini. Soit*

$$X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G,\ g.x = x\}$$

l'ensemble des points fixes de X *sous l'action de* G*. Alors*

$$\mathrm{Card}(X) \equiv \mathrm{Card}(X^G) \pmod p$$

Définition 10 *On pose, pour* $g \in G$*,*

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

Remarque 11 *On a, par définition,*

$$X^G = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$$

Proposition 12 <u>*Formule de Burnside*</u>
On suppose G *et* X *finis. Alors*

$$\sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

Le nombre d'orbites de X *sous l'action de* G*, noté* $\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G))$*, est donné par la formule :*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))$$

Application 13 *Nombres de coloriages d'un tétraèdre et d'un cube.*

2 Le groupe orthogonal d'un espace euclidien [MER] p.149 $\to$ 177

Dans cette section E est un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et d'une norme induit $||.||$.

2.1 Généralités

Définition 14 *On appelle application orthogonale (ou isométrie vectorielle) de E toute application $u : E \to E$ telle que*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

On note $O(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de E.

Théorème 15 *Soit une application $u : E \to E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) u est une application orthogonale
(ii) u est linéaire **et** *conserve la norme ($\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$)*
(iii) u est linéaire et transforme une base orthonormale en une base orthonormale.
(iv) u est linéaire et transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.
(v) u est linéaire **et** *$u^* \circ u = I_d$*
(vi) u est automorphisme de E et $u^* = u^{-1}$.

Définition 16 *Le noyau du morphisme*

$$\begin{aligned} \det : (O(E), \circ) &\to (\{\pm 1\}, .) \\ u &\mapsto \det(u) \end{aligned}$$

est appelé groupe spécial orthogonal de E (ou groupe des rotations ou encore groupes des applications orthogonales positives). On le note $SO(E)$ ou $O^+(E)$:

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$$

On pose également

$$O^-(E) = O(E) \backslash SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = -1\}$$

Remarque 17 *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale et si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors*

$$u \in O(E) \Leftrightarrow u^* = u^{-1} \Leftrightarrow {}^tM = M^{-1}$$

Une telle matrice est dite orthogonale. On définit également le groupe des matrices orthogonales, orthogonales positives et négatives, notés respectivement $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^{-1}(\mathbb{R})$

Théorème 18 *Soit F un s.e.v. de E.*
(i) Si $u(F) \subset F$ pour $u \in O(E)$, alors $u(F^\perp) \subset F^\perp$ et on a $u_{|F} \in O(F)$ et $u_{|F^\perp} \in O(F^\perp)$.
(ii) Réciproquement, si $v \in O(F)$ et $w \in O(F^\perp)$, l'endormophisme u définie par $u_{|F} = v$ et $u_{|F^\perp} = w$ appartient à $O(E)$.

Théorème 19 *Soit x et y deux vecteurs non nuls, de même norme. Il existe une et une seule réflexion s échangeant x et y ((i.e.) telle que $s(x) = y$). C'est la réflexion de base $H = (\mathbb{R}(x-y))^\perp$.*
L'hyperplan H est appelé hyperplan médiateur du couple (x, y).

2.2 Applications orthogonales du plan

Théorème 20 *Les matrices orthogonales M de taille 2 sont de la forme :*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

ou

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \notin SO_2(\mathbb{R})$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. Comme on a

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}, \quad \forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$$

les groupes $SO_2(\mathbb{R})$ et $SO(E)$ sont commutatifs.

Définition 21 *Dans le plan orienté E, l'application*

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\to SO(E) \\ \theta &\mapsto r \end{aligned}$$

est un isomorphisme. $\zeta(\theta)$ est appelée rotation de mesure θ.

Théorème 22 *Classification des applications orthogonale en dimension 2 suivant la dimension de l'espace des vecteurs invariants, noté* $\mathrm{Inv}(u)$
Voir Tableau 1

Théorème 23 *Le produit de deux réflexions est une rotation.*
Réciproquement, toute rotation peut s'écrire comme produit de deux réflexions, l'une d'elle pouvant être choisie arbitrairement.

Théorème 24 *Le groupe $SO(E)$ agit simplement et transitivement sur l'ensemble U des vecteurs unitaires de E.*

2.3 Applications orthogonales de l'espace

Définition 25 *Une rotation de E est un endomorphisme u de E pour lequel il existe une droite D vérifiant :*
(i) $u_{|D} = Id_{|D}$
(ii) $u_{|D^\perp}$ *est une rotation du plan* $D^\perp$.
Si $u \neq Id$, la droite D est unique et s'appelle axe de la rotation u et on a $\mathrm{Inv}(u) = D$.

Théorème 26 *Les matrices orthogonales M de taille 3 sont de la forme :*

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

où $\epsilon = +1$ si $\det A = 1$, (i.e.) $M \in SO_3(\mathbb{R})$;
et $\epsilon = -1$ si $\det A = -1$, (i.e.) $M \notin SO_3(\mathbb{R})$

Théorème 27 *Classification des applications orthogonale en dimension 3 suivant la dimension de l'espace des vecteurs invariants, noté* $\mathrm{Inv}(u)$
Voir Tableau 2

Théorème 28 *La composée de deux réflexions $s_P \circ s_Q$ est une rotation d'axe $P \cap Q$ si $P \neq Q$ et l'identité sinon.*
Réciproquement, toute rotation r_D d'axe D distincte de l'identité s'écrit comme produit $s_P \circ s_Q$ de deux réflexions par rapport à des plans qui contiennent D et dont l'une d'elle pouvant être choisie arbitrairement.

3 Action de groupe et espace affine [GRI] p.387 → 389

Définition 29 *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et E un espace vectoriel. On dit que $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'espace affine de direction E, si $(E, +)$ agit transitivement et librement sur $\mathcal{E}$ en notant*

$$E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$
$$(\overrightarrow{v}, P) \mapsto t_{\overrightarrow{v}}(P) \underset{not}{=} P \overset{\circ}{+} \overrightarrow{v}$$

On a donc :
(i) $P \overset{\circ}{+} \overrightarrow{0} = P$
(ii) Pour tous $P, Q \in \mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ tel que $Q = P + \overrightarrow{v}$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ sera noté $\overrightarrow{PQ}$ et on a donc

$$Q = P \overset{\circ}{+} \overrightarrow{PQ}$$

(iii) Pour tout $P \in \mathcal{E}$, et $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$, on a

$$(P \overset{\circ}{+} \overrightarrow{v}) \overset{\circ}{+} \overrightarrow{w} = P \overset{\circ}{+} (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$$

ce qui équivaut à la relation de Chasles

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$$

L'application $t_{\overrightarrow{v}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est dite translation associée à $\overrightarrow{v}$.

Définition 30 *Le choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ induit une bijection*

$$V_O : \mathcal{E} \to E$$
$$P \mapsto \overrightarrow{OP}$$

qui permet de transporter sur $\mathcal{E}$ la structure d'espace vectoriel de E comme suit

$$P \overset{\circ}{+} Q := O \overset{\circ}{+} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$
$$\lambda \overset{\circ}{\times} P := O \overset{\circ}{+} \lambda \times \overrightarrow{OP}$$

L'espace vectoriel ainsi obtenu est dit vectorialisé de $\mathcal{E}$ en O et il est noté $\mathcal{E}_{\overrightarrow{O}}$

Proposition 31 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $O \in \mathcal{E}$. Alors $\mathcal{E}$ est isomorphe à l'espace affine $\mathcal{E}_{\overrightarrow{O}}$ muni de la structure standard.*

4 Le groupe des isométries affines

4.1 Définition et caratère affine [ML3al] p.389 → 391

Définition 32 *Une isométrie de $\mathcal{E}$ est une application f de $\mathcal{E}$ dans lui-même conservant les distances (i.e.)*

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}, \quad \mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M, N)$$

Exemple 33 *Les translations sont des isométries.*

Proposition 34 *Les isométries de $\mathcal{E}$ sont les applications affines dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal.*

Remarque 35 *Les isométries sont aussi appelées isométries affines par opposition aux autormorphismes orthogonaux qui sont appelés aussi isométries vectorielles.*

Corollaire 36 *(i) L'ensemble $Is(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de du groupe affine de $\mathcal{E}$.*
(ii) L'application

$$\Phi' \; : \; Is(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}^*$$
$$f \mapsto \det(\overrightarrow{f})$$

est un morphisme de groupes d'image $\{\pm 1\}$

Exemple 37 *Les symétries affines orthogonales sont des isométries : ce sont des applications affines dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal.*

4.2 Déplacements et antidéplacements [ML3al] p.391-392

Définition 38 *On appelle* <u>*déplacement*</u> *de $\mathcal{E}$ une isométrie dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal de déterminant +1 ((i.e.) dont la partie linéaire est une rotation vectorielle) et un* <u>*antidéplacement*</u> *de $\mathcal{E}$ une isométrie dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal de déterminant -1.*
On note $Is^+(\mathcal{E})$ et $Is^-(\mathcal{E})$ respectivement l'ensemble des déplacements et antidéplacements de $\mathcal{E}$.

Proposition 39 *$Is^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué de $Is(\mathcal{E})$.*

Définition 40 *Les déplacements de $\mathcal{E}$ ayant un point fixes sont appelés rotations affines de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.*

Proposition 41 *Soit s une symétrie orthogonale par rapport au sous-espace affine $\mathcal{V}$. Alors :*
(i) La partie linéaire de s est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$, donc de déterminant $(-1)^{\dim \mathcal{V}^\perp}$.
(ii) La symétrie orthogonale s est un déplacement si et seulement si $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de codimension paire ((i.e.) $\dim\mathcal{E} - \dim\mathcal{V}$ est pair).

Définition 42 *Une réflexion affine est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

4.3 Décomposition [ML3al] p.393 → 395

Proposition 43 <u>*Adjonction de points fixes*</u>
Si $f \in Is(\mathcal{E})\backslash\{Id\}$, alors il existe une réflexion s telle que l'ensemble des point fixes de $s \circ f$ contienne strictement l'ensemble des points fixes de f.

Théorème 44 *Toute isométrie d'un espace affine euclidien de dimension n est la composée d'au plus $n+1$ réflexions.*

Proposition 45 *Si φ est un automorphisme orthogonal de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, alors $\ker(\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$ et $\mathrm{im}(\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$ sont des supplémentaires orthogonaux de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ stables par φ.*

Théorème 46 ♠ <u>*Décomposition canonique d'une isométrie*</u> ♠
Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Il existe un unique couple $(t_{\overrightarrow{u}}, f_0)$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et f_0 est une isométrie ayant un point fixe vérifiant

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ f_0 = f_0 \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

De plus, dans ce cas, $\overrightarrow{u} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$

4.4 Classification en dimension 2 et 3

4.4.1 En dimension 2 [ML3al] p.396

Voir Tableau 3

4.4.2 En dimension 3 [ML3al] p.401

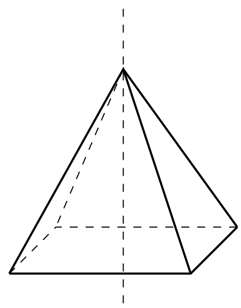
Voir Tableau 4

5 Isométries préservant une partie

5.1 Généralités [GRI] p.401

Définition 47 *Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. On dit qu'une isométrie f* <u>*laisse $\mathcal{S}$ invariant*</u> *si $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.*

Exemple 48 *Si $\mathcal{S}$ est une pyramide dont la base est un polygone régulier à n côtés (ici $n = 4$), les rotations d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe "hauteur" laissent invariant $\mathcal{S}$.*



Proposition 49 *L'ensemble $Is(\mathcal{S})$ des isométries qui laissent $\mathcal{S}$ invariant est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$ dit* <u>*groupe (complet) des symétries*</u> *de $\mathcal{S}$.*

5.2 Le groupe diédral [MER] p.304 → 311

Définition 50 *On appelle* <u>*groupe diédral D_n*</u> *le groupe des isométries du plan qui conservent un polygone régulier P_n à n côtés.*

Théorème 51 *Le groupe diédral D_n est un groupe fini d'ordre $2n$ engendré par un élément r d'ordre n et un élément s d'ordre 2.*
Il contient n rotations d'angle $\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, ..., n-1$ ainsi que n symétries. En notant r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s une des symétries, on a

$$r^n = 1 \qquad s^2 = 1 \qquad (sr)^2 = 1$$

Exemple 52 *Le groupe du triangle équilatéral est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3$ des permutations d'un ensemble de trois éléments. On peut donc écrire*

$$D_3 \approx \mathfrak{S}_3$$

Remarque 53 *On peut identifier les isométries de* $\text{Is}(P_n)$ *à leurs parties linéaires et aux matrices de ces parties linéaires dans une base orthonormale directe. On a donc*

$$\text{Is}^+(P_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \ ; \ k = 0, ..., n-1 \right\}$$

$$\text{Is}^-(P_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ \sin k\theta & -\cos k\theta \end{pmatrix} \ ; \ k = 0, ..., n-1 \right\}$$

Proposition 54 *Les classes de conjugaison du groupe diédral D_n sont :*
- Pour n est pair : on a $\frac{n}{2}+3$ *classes de conjugaison*

$$\{Id\}, \{-Id\}, \{r, r^{n-1}\}, ..., \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}$$

$$\{s, sr^2, ..., sr^{n-2}\}, ..., \{sr, sr^3, ..., s^{n-1}\}$$

- Pour n est impair : on a $\frac{n+1}{2}+1$ *classes de conjugaison*

$$\{Id\}, \{r, r^{n-1}\}, ..., \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n+1}{2}}\}$$

$$\{s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$$

[OTZ] p.17

5.3 Isométries du tétraèdre

Théorème 55 ♠ *Soient Δ_4 le tétraèdre régulier et $Is(\Delta_4)$ le groupe des isométries préservant Δ_4. Alors*

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

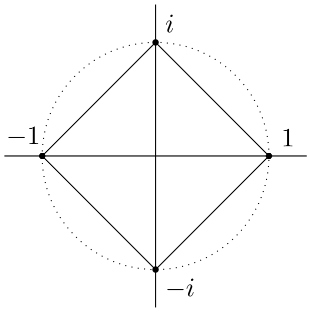
La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est voir Tableau 3 ♠

6 Racines n-ième de l'unité et polygones réguliers [BIA] p.79-80

Définition 56 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note l'ensemble $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.*
On appelle racine primitive n-ièmes de l'unité tout générateur de $\mathbb{U}_n$.
On note $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des points ayant pour affixe les racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 57 *(i)* $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{\exp(2ik\pi/n),\ 1 \leq k \leq n\}$ *est un groupe cyclique d'ordre n.*
(ii) $\overline{\mathcal{U}_n(\mathbb{C})} = \{\exp(2ik\pi/n),\ 1 \leq k \leq m,\ \text{pgcd}(k,n) = 1\}$ *a pour cardinal $\varphi(n)$.*
(iii) $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier de centre O et inclus dans le cercle trigonométrique.

Exemple 58 $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{1, -1, i, -i\}$.



Proposition 59 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et ξ une racine primitive n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Alors les (autres) racines primitives m-ièmes de l'unité sont les ξ^k, où* $1 \leq k \leq n$ $\text{pgcd}(k,n) = 1$.
En particulier, si n est premier, toutes les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ sont primitives.

Remarque 60 *Interprétation géométrique*
Les polygones réguliers étoilés à n sommets d'un seul tenant s'obtiennent en joignant de k en k, avec $\text{pgcd}(k,n) = 1$, *les sommets d'un polygone régulier à n sommets.*
En particulier, si n est premier, tous les polygones réguliers étoilés à n sommets sont d'un seul tenant.
Voir Figure 3, Figure 4 *et* Figure 5.

7 Quaternions [PER] p.160 → 164

Proposition-définition 61 *Il existe une algèbre $\mathbb{H}$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, appelé algèbre des quaternions, muni d'une base 1,i,j,k telle que :*
(i) 1 est élément neutre pour la multiplication,
(ii) on a les formules +ùùù

$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Un quaternions s'écrit alors

$$q = a + bi + cj + dk, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Définition 62 $\mathbb{H}$ *est muni de la norme algébrique N suivante :* $\forall\ q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$

$$N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Théorème 63 ♠ *$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions* ♠
Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

8 Formes quadratiques - Classifications des coniques et quadriques

8.1 Formes quadratiques et matrices symétriques [GOUag] p.229-230

Définition 64 *On appelle* <u>*forme quadratique*</u> *sur E toute application q de la forme*

$$q : E \to \mathbb{K},\ x \mapsto \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Proposition 65 *Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la* <u>*forme polaire*</u> *de q et on a*

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2,\quad \varphi(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\ &= \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]\end{aligned}$$

Définition 66 *Soient q une forme quadratique sur E et B une base de E.*
On appelle <u>*matrice de q dans la base B*</u> *la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B, et le* <u>*rang de q*</u> *le rang de cette matrice.*

Exemple 67 *On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on y définit la forme quadratique q par*

$$u = (x,y,z) \mapsto q(u) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$$

Alors la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence [H2G2t1] p.149→157

Définition 68 *On définit l'*<u>*action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence*</u> *par*

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P,A) &\mapsto P.A = PAP^*\end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont <u>*congrues*</u> *si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.*

Théorème 69 *En notant*

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = PAP^*\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :
(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A'$$

(ii) <u>*Théorème de Sylvester :*</u> *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:*

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A' \text{ et } \mathrm{sign}A = \mathrm{sign}A'$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$ inversibles :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$$

où $\delta(A)$ est le déterminant de A modulo les carrés de $\mathbb{F}_q$.

8.3 Coniques et quadriques [GRI] p.413 → 420

Définition 70 *On appelle* <u>*conique*</u> *l'ensemble C des points $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation*

$$\underbrace{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}_{:=q(x,y)} + \underbrace{2Dx + 2Ey + F}_{:=\varphi(x,y)} = 0$$

Théorème 71 <u>*Classification des coniques*</u>
Soit C une conique définie par l'équation $q(x,y) + \varphi(x,y) = 0$. On suppose que $C \neq \varnothing$ et que C n'est pas réduit à un point. Alors :
1. Si $\mathrm{sgn}(q) = (2,0)$, alors C est une ellipse.
2. Si $\mathrm{sgn}(q) = (1,1)$, alors C est une hyperbole qui éventuellement dégénère en deux droites non parallèles.
3. Si $\mathrm{sgn}(q) = (1,0)$, alors C est une parabole qui éventuellement dégénère en une droite, ou deux droites parallèles, si la direction principale isotrope est contenue dans $\mathrm{Ker}\varphi$.

Définition 72 *On appelle* <u>*quadrique*</u> *l'ensemble des points $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient l'équation*

$$\underbrace{Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz}_{:=q(x,y,z)} + \underbrace{2Cx + 2C'y + 2C''z + D}_{:=\varphi(x,y,z)} = 0$$

Théorème 73 <u>*Classification des quadriques*</u>
Soit Q une quadrique définie par l'équation $q(x,y,z) + \varphi(x,y,z) = 0$. On suppose que $Q \neq \varnothing$ et que Q n'est pas réduit à un point. Alors :
1. $\mathrm{rg}(q) = 3$:
(a) Si $\mathrm{sgn}(q) = (3,0)$, alors Q est un ellipsoïde.
(b) Si $\mathrm{sgn}(q) = (2,1)$, alors Q est
- un hyperboloïde à une nappe
- un cône
- un hyperboloïde à deux nappes
2. $\mathrm{rg}(q) = 2$:
(a) Si $\mathrm{sgn}(q) = (2,0)$, alors Q est une paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique si la direction principale isotrope est contenue dans $\mathrm{Ker}\varphi$.
(b) Si $\mathrm{sgn}(q) = (1,1)$, alors Q est une paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique si la direction principale isotrope est contenue dans $\mathrm{Ker}\varphi$.
3. $\mathrm{rg}(q) = 1$:
Q est une cylindre parabolique qui éventuellement dégénère en deux plans parallèles, si les deux directions principales isotropes est contenue dans $\mathrm{Ker}\varphi$.

Illustrations

dimInv(u)	u	$O^{\pm}(E)$?
2	Id	$O^{+}(\mathcal{E})$
1	Réflexion ($i.e.$) symétrie orthogonale par rapport à une droite	$O^{-}(\mathcal{E})$
0	rotation (distincte de Id)	$O^{+}(\mathcal{E})$

Tableau 1 : Classification des applications orthogonales du plan

dimInv(u)	u	$O^{\pm}(E)$?
3	Id	$O^{+}(\mathcal{E})$
2	Réflexion ($i.e.$) symétrie orthogonale par rapport à un plan	$O^{-}(\mathcal{E})$
1	rotation d'axe une droite D (distincte de Id)	$O^{+}(\mathcal{E})$
0	composée d'une rotation d'axe D et d'une réflexio par rapport au plan $D^{\perp}$	$O^{-}(\mathcal{E})$

Tableau 2 : Classification des applications orthogonales de l'espace

f	$\overrightarrow{f}$	Points fixes	$Is^{\pm}(\mathcal{E})$?
translation $t_{\overrightarrow{u}}$	$\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$	$\mathcal{E}$ si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ $\varnothing$ si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
rotation affine non triviale	rotation vectorielle ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$)	un point	$Is^{+}(\mathcal{E})$
réflexion	réflexion vectorielle	une droite	$Is^{-}(\mathcal{E})$
symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$	réflexion vectorielle	aucun	$Is^{-}(\mathcal{E})$

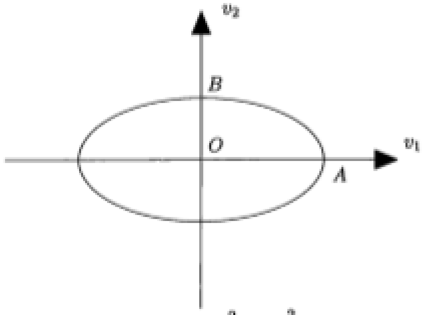
Tableau 3 : Classification des isométries planes

f	$\overrightarrow{f}$	Points fixes	$Is^{\pm}(\mathcal{E})$?
translation $t_{\overrightarrow{u}}$	$\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$	$\mathcal{E}$ si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ $\varnothing$ si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
rotation affine non triviale $r(\mathcal{D},\theta)$, $\theta\neq 0 \pmod{2\pi})$	rotation vectorielle $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta)$	la droite $\mathcal{D}$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
vissage $t_{\overrightarrow{u}}\circ r(\mathcal{D},\theta)=r(\mathcal{D},\theta)\circ t_{\overrightarrow{u}}$ $\theta\neq 0 \pmod{2\pi}$, $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{D}}\backslash\{\overrightarrow{0}\}$	rotation vectorielle $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta)$	$\varnothing$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
réflexion $s_{\mathcal{P}}$	réflexion vectorielle $\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$	le plan $\mathcal{P}$	$Is^{-}(\mathcal{E})$
symétrie glissée $t_{\overrightarrow{u}}\circ s_{\mathcal{P}}=s_{\mathcal{P}}\circ t_{\overrightarrow{u}}$ $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}\backslash\{\overrightarrow{0}\}$	réflexion vectorielle $\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$	$\varnothing$	$Is^{-}(\mathcal{E})$
antirotation $s_{\mathcal{P}}\circ r(\mathcal{D},\theta)=r(\mathcal{D},\theta)\circ s_{\mathcal{P}}$ $\theta\neq 0 \pmod{2\pi}$, $\mathcal{P}\perp\mathcal{D}$	$\overrightarrow{f}=\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\circ\overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta)$ $=\overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta)\circ\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$	$\{\mathcal{P}\cap\mathcal{D}\}$	$Is^{-}(\mathcal{E})$

Tableau 4 : Classification des isométries de l'espace

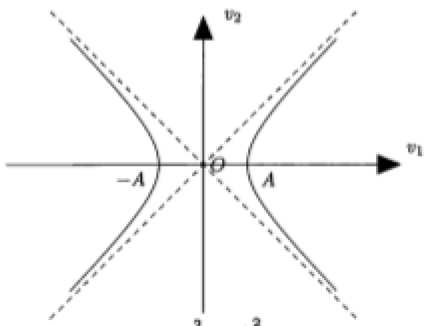
	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1=\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2=\epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4=\epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0

Tableau 3 : La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$



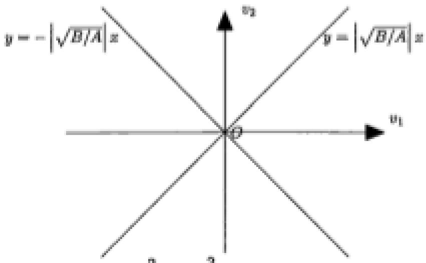
Ellipse : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 1



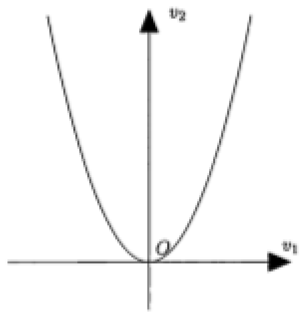
Hyperbole : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 2



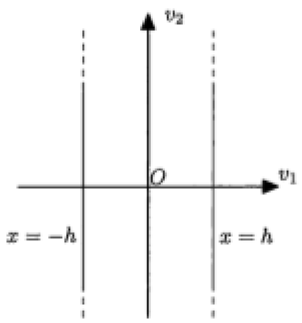
$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$

Figure 3

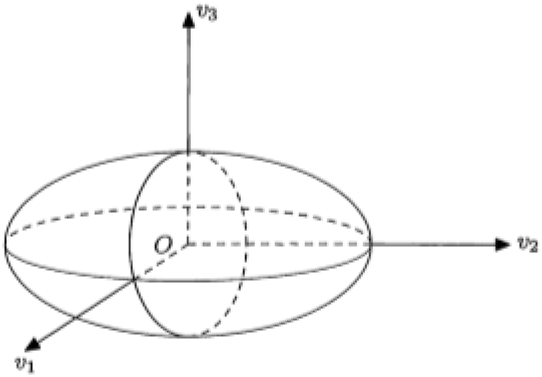


Parabole : $y = ax^2$

Figure 4

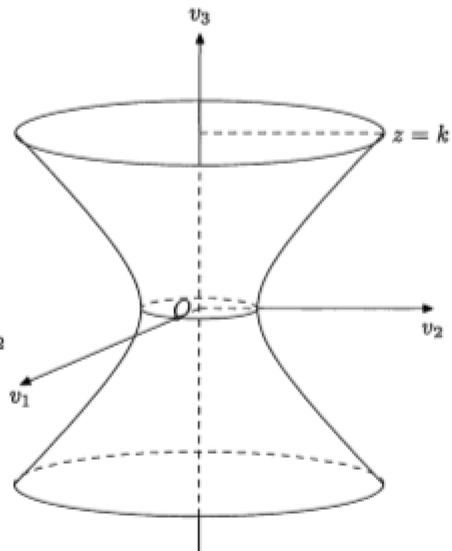


Illustrations de la classification des coniques, Joseph Grifone



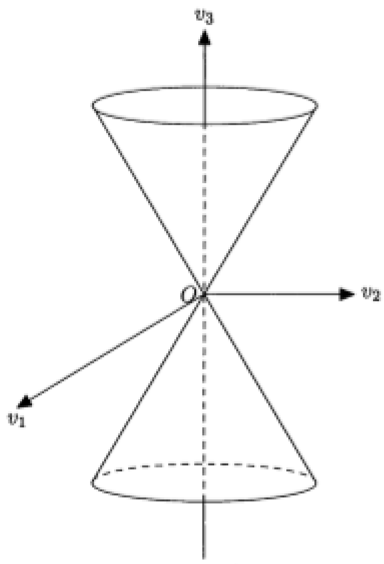
Elllipsoïde : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$

Figure 6



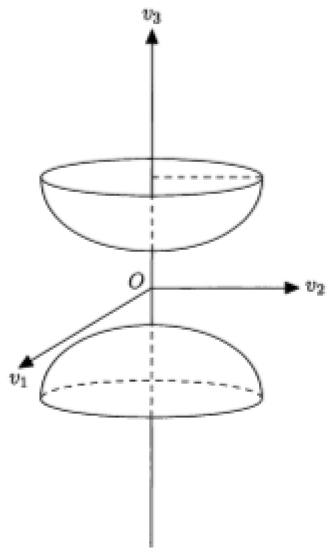
Hyperboloïde à une nappe : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$

Figure 7



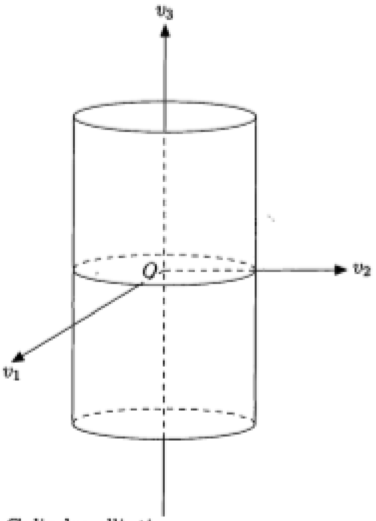
Cône : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$

Figure 8



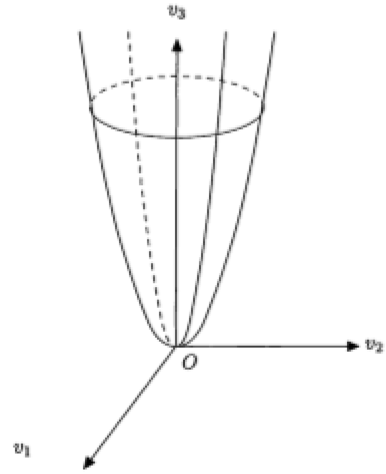
Hyperboloïde à deux nappes :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$

Figure 9



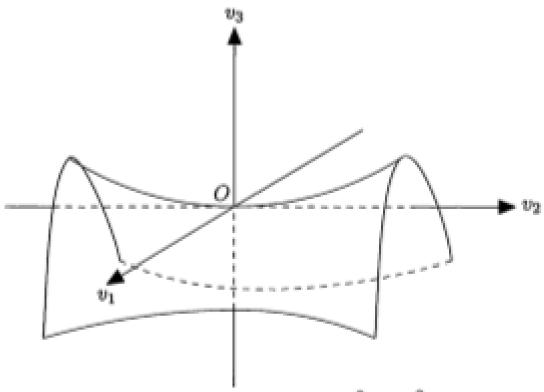
Cylindre elliptique :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 10



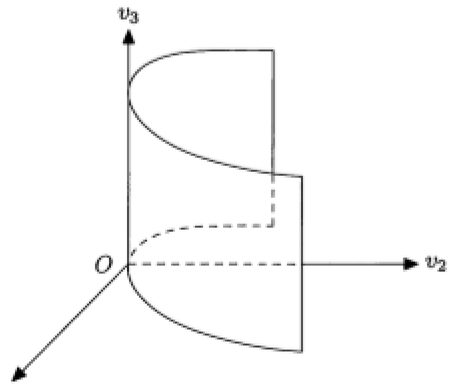
Paraboloïde elliptique :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z$

Figure 11



Paraboloïde hyperbolique : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$

Figure 12



Cylindre parabolique : $y = ax^2$

Figure 13

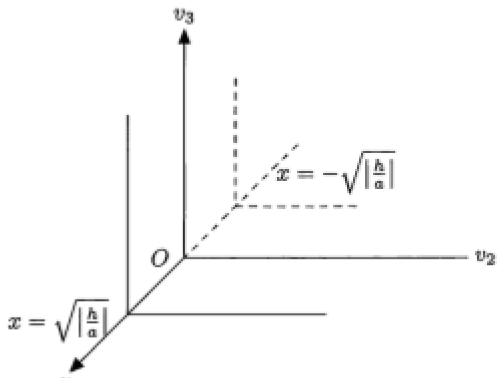


Figure 14

Illustrations de la classification des quadriques, Joseph Grifone

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :