Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Un type important d'espaces complets sont les espaces de Hilbert. Il s'agit d'une généralisation à la dimension infinie des espaces euclidiens. Les espaces de Hilbert sont très intéressants car on a un petit plus géométrique dans ces espaces : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc.

Le produit scalaire nous permet de définir la notion d'orthogonalité, et celle-ci nous amène, à l'aide de la complétude, aux projections sur des sous-espaces. Ces projections sont intéressantes, car sous certaines hypothèses sur les sous-espaces, on peut décomposer notre espace de Hilbert en somme directe de deux sous-espaces totalement caractérisées par la projection. Plus précisemment, en prenant K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et en notant p_K la projection orthogonale sur K, on a

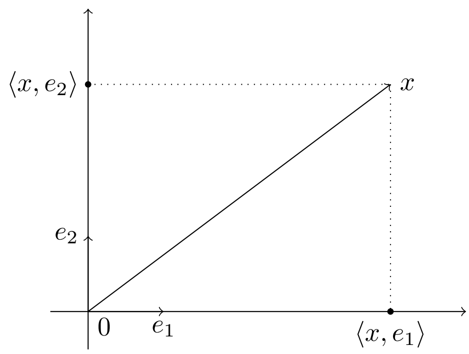
$$H = \mathrm{Ker} p_K \oplus \mathrm{Im} p_K = K^\perp \oplus K$$

Un théorème remarquable mérite d'être mis en avant : le théorème de Riesz-Fréchet. Pour tout vecteur x d'un espace de Hilbert H, la forme linéaire $y \to \langle y, x\rangle$ est linéaire continue sur H (et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sa norme est égale $||x||$). Le théorème de Riesz-Fréchet énonce la réciproque : toute forme linéaire continue sur H s'obtient de cette façon !

La notion de "base hilbertienne" nous permet d'étendre la notion de coordonnées pour une famille $(e_i)_{i\in I}$ où I est un ensemble infini. Illustrons notre propos sur $\mathbb{R}^2$ où l'on comprend très bien le sens de $\langle x, e_i\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $i = 1, 2$ Ainsi, quand on écrit, "pour tout $x \in H$, on a

$$\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i = x\text{"}$$

Il faut s'imaginer une décomposition comme pour le cas $\mathbb{R}^n$ mais en dimension infinie. On dit d'ailleurs que les $x_i := \langle x, e_i\rangle$ sont les coordonnées de x dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$.



Un exemple particulier est donné par l'espace L^2. Dans cet espace, en notant, $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, si bien que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

Le "dans $L^2_{2\pi}$" est très important ! Cette relation n'est pas toujours vraie en l'appliquant en un point x !

Références

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani Mohammed
[BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
Projection sur un convexe fermé

1 Espaces de Hilbert

1.1 Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert [ML3al] p.321 → 326

Définition 1 *Un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ tel que l'espace vectoriel $(H, ||.|| = \sqrt{\langle ., . \rangle})$ soit complet.*

Exemple 2 *1) $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ est complet pour la norme associée.*
2) $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\int_X |f|^2}$
3) $l^2(I, \mathbb{K})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\sum_{k \in I} |x_k|^2}$

Proposition 3 *Inégalité de Cauchy-Schwartz*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$. Alors

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq ||x||^2 ||y||^2$$

L'inégalité est une égalité si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non tous deux nuls tels que $\alpha x + \beta y = 0$

Proposition 4 *Identité de polarisation*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x+y||^2 + ||x-y||^2}{2}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4} + i\frac{||x+iy||^2 - ||x-iy||^2}{4}$$

Proposition 5 *Identité du parallélogramme*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$. Alors,

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

1.2 Orthogonalité [ML3al] p.326 → 330

Définition 6 *Deux éléments $x, y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.*
Deux parties $A, B \subset H$ sont dites orthogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$. On note $A \perp B$.

Proposition 7 *Pour toute partie $A \subset H$, on note*

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$$

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, appelé orthogonal de A dans H qui vérifie
1) si $B \subset A$, alors $A^\perp \subset B^\perp$
2) $A \subset (A^\perp)^\perp$
3) $\overline{A}^\perp = A^\perp$
4) $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}^\perp$
5) $\overline{\mathrm{vect}(A)} \cap A^\perp = \{0\}$

Théorème 8 ♠ *Projection sur un convexe fermé* ♠ *Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.*
Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||x-u|| = \min_{y \in K} ||x-y|| \qquad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad \text{et} \quad \langle x-u, y-u \rangle \leq 0 \ \forall y \in K \qquad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Théorème 9 *Projection sur un sous-espace fermé Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $y \in p_K(x)$
2) $y \in K$ et $(x-y) \in K^\perp$

Proposition 10 *Soit K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. Alors l'application $p_K : H \to H, x \mapsto p_K(x)$ est une application linéaire continue qui vérifie :*
1) $p_K \circ p_K = p_K$
2) $\mathrm{Im} p_K = K$ et $\mathrm{Ker} p_K = K^\perp$
3) $\mathrm{Id}_H - p_K$ est la projection sur $K^\perp$
4) $\mathrm{Ker} p_K \oplus \mathrm{Im} p_K = H$

Corollaire 11 *1) Si L est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $L \oplus L^\perp = H$*
2) Si $A \subset H$ est une partie quelconque de H, alors $\overline{\mathrm{vect}(A)} \oplus A^\perp = H$ et $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}$. En particulier, si $A = K$ est un sous-espace vectoriel de H, alors

$$\overline{K} \oplus K^\perp = H \quad \text{et} \quad (K^\perp)^\perp = \overline{K}$$

3) Si K est un sous-espace vectoriel de H, alors K est dans H si et seulement si $K^\perp = 0$

Corollaire 12 *Un sous-espace vectoriel K de H est dense dans H si et seulement si toute forme linéaire continue sur H et nulle sur K est nulle sur H.*

1.3 Théorème de Riesz-Fréchet [ML3al] p.330-331

Théorème 13 *Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*
Soit $\varphi : H \to \mathbb{K}$ une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur un espace de Hilbert $(H, \langle .,. \rangle)$. Alors il existe un unique vecteur $x \in H$ tel que, pour tout $y \in H$, $\varphi(y) = \langle y, x \rangle$.
De plus, la norme de l'application linéaire φ vaut $||\varphi|| = ||x||$.

Théorème 14 *Si $\mathcal{F} : L^2(X, \mu, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur $L^2(X, \mu, \mathbb{K})$, il existe une unique (classe de) fonction(s) $g \in L^2(X, \mu, \mathbb{K})$ telle que, pour toute $f \in L^2(X, \mu, \mathbb{K})$, on ait*

$$\mathcal{F}(f) = \int_X f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}\mu(x)$$

2 Bases hilbertiennes

2.1 Définitions et premières propriétés [ML3al] p.331 → 334

Définition 15 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de H est dite*
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H.
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H.

Proposition 16 *1) Toute famille orthormée est libre*
2) $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$.

Proposition 17 *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de H est une base hilbertienne si et seulement si c'est une famille orthonormée maximale pour l'inclusion (i.e.) si $(f_j)_{j\in J}$ est une autre famille orthonormée vérifiant $\{e_i \ : \ i \in I\} \subset \{f_j \ : \ j \in J\}$, alors ces deux parties sont égales.*

Corollaire 18 *Tout espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$ possède une base hilbertienne.*

Proposition 19 *Inégalité de Bessel*
Si $(e_j)_{j\in J}$ est une famille orthonormée d'éléments de H, alors, pour tout $x \in H$, la famille $(|\langle x, e_j \rangle|^2)_{j\in J}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\sum_{j\in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2$$

Théorème 20 *Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille orthonormée d'éléments de H. On note*

$$K_J = \overline{\mathrm{vect}((e_j)_{j\in J})}$$

et P_{K_J} la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé K_J. Alors, pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_j \rangle e_j)_{j\in J}$ et on a

$$\sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j = P_{K_J}(x)$$

Corollaire 21 *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H.*
(i) Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable dans H et on a

$$\sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i = x$$

On dit que les $x_i := \langle x, e_i \rangle$ sont les coordonnées de x dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$.
(ii) Pour tout $x, y \in H$, la famille $(\langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle})_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{K}$ et on a

$$\sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} = \langle x, y \rangle$$

En coordonnées dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$, cela s'écrit

$$\sum_{i\in I} x_i \overline{y_i} = \langle x, y \rangle$$

(iii) Pour tout $x \in H$, la famille $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = ||x||^2 \quad \text{(égalité de Parseval)}$$

Théorème 22 *Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors H est isomorphe à $l^2(I, \mathbb{K})$.*

2.2 Polynômes orthogonaux

Définition 23 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. **[OBJ] p.110**

Théorème 24 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$. **[OBJ] p.140 → 143**

3 Applications au séries de Fourier

3.1 Définitions et premières propriétés [ELAM2] p.170 → 178

Définition-Proposition-Rappels 25 *(i) On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
Muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$$

$(\mathcal{C}_{2\pi}, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.
(ii) $L^2_{2\pi}$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert.
(iii) Par l'inégalité de Hölder, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{C}_{2\pi} \subset L^\infty_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$$

Définition 26 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ donné par*

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Théorème 27 *Le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.*

Définition 28 *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f)$ donné par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Remarque 29 *1) Pour $f \in L^2_{2\pi}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.*
2) On a également des coefficients de Fourier dits réels ou trigonométriques et donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Définition 30 *Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.*

3.2 Convergence L^2 [ELAM2] p.193-194

Théorème 31 ♠ *Formule de Parseval* ♠
Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors
1) $(S_N(f))$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N\to+\infty}||\sigma_N(f) - f||_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Remarque 32 *En coefficients de Fourier réels, la formule de Parseval devient*

$$||f||_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

Questions

Exercice : Continuité du produit scalaire
Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de H qui convergent respectivement vers $x, y \in H$.
Montrer que $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, y \rangle$.

Solution :

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &= \underbrace{||x_n||}_{<\infty} ||y - y_n|| + ||x_n - x|| \underbrace{||y||}_{<\infty} \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $||y - y_n|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $||x_n - x|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit donc que

$$\langle x_n, y_n \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle$$

Exercice : Quelques identités
Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert et $x, y, z \in H$. Montrer les identités suivantes :
1) Identité de polarisation
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{2}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4} + i\frac{||x+iy||^2 - ||x-iy||^2}{4}$$

2) Identité du parallélogramme

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

3) Identité de la médiane

$$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = \frac{1}{2}||z-y||^2 + 2\left|\left|x - \frac{y+z}{2}\right|\right|^2$$

Solution : 1) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\langle x, y \rangle + ||y||^2 \\ ||x-y||^2 &= ||x||^2 - 2\langle x, y \rangle + ||y||^2 \end{aligned}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première ligne, on a bien le résultat.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\Re e(\langle x, y \rangle) + ||y||^2 \tag{1}$$
$$||x-y||^2 = ||x||^2 - 2\Re e(\langle x, y \rangle) + ||y||^2 \tag{2}$$
$$||x+iy||^2 = ||x||^2 + 2\Re e(-i\langle x, y \rangle) + ||y||^2 \tag{3}$$
$$||x-iy||^2 = ||x||^2 - 2\Re e(-i\langle x, y \rangle) + ||y||^2 \tag{4}$$

Or $\mathfrak{Re}(-i\langle x,y\rangle) = \mathfrak{Im}(\langle x,y\rangle)$, et comme $\langle x,y\rangle = \mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) + i\mathfrak{Im}(\langle x,y\rangle)$, en effectuant $[(1)-(2)] + [(3)-(4)]$, on obtient bien le résultat.

2) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \\ ||x-y||^2 &= ||x||^2 - 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \end{aligned}$$

En additionnant les deux égalités, on a le résultat.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) + ||y||^2 \\ ||x-y||^2 &= ||x||^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) + ||y||^2 \end{aligned}$$

En additionnant encore les deux égalités, on a bien le résultat.

3) D'une part,

$$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) - 2\mathfrak{Re}(\langle x,z\rangle)$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2}||z-y||^2 + 2\left|\left|x - \frac{y+z}{2}\right|\right|^2 = ||y||^2 + ||z||^2 + 2||x||^2 - \mathfrak{Re}(\langle y,z\rangle) + \mathfrak{Re}(\langle y,z\rangle) - 2\mathfrak{Re}(\langle x, y+z\rangle)$$

Ce qui nous permet de conclure.

Exercice : Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert, C convexe complet de H.
Montrer que la projection orthogonale p_C sur C est une application 1-lipschitzienne.

Solution : Soit $x, x' \in H$. Posons $y = p_C(x)$ et $y' = p_C(x')$. On a

$$\begin{aligned} ||x-x'||^2 &= ||(x-x') - (y-y') + (y-y')||^2 \\ &= ||(x-x') - (y-y')||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle (x-x') - (y-y'), (y-y')\rangle) + ||y-y'||^2 \quad (\dagger) \end{aligned}$$

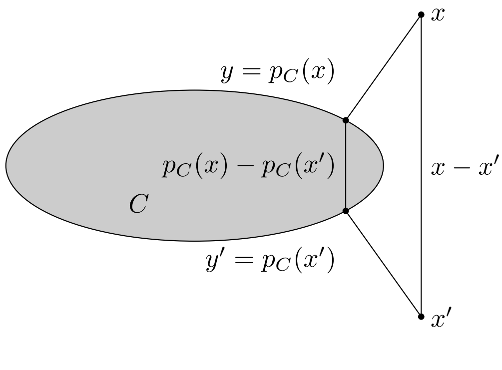
Or, en utilisant la caractérisation angulaire, on

$$\mathfrak{Re}(\langle (x-x') - (y-y'), (y-y')\rangle) = -\underbrace{\mathfrak{Re}(\langle x-y-, y'-y\rangle)}_{\leq 0} - \underbrace{\mathfrak{Re}(\langle x'-y'), y-y'\rangle)}_{\leq 0} \geq 0$$

Par suite, dans $(\dagger)$, on a

$$||x-x'||^2 \geq ||y-y'||^2 = ||p_C(x) - p_C(x')||^2$$

D'où le résultat.
Sur un dessin, le résultat est évident.



Exercice : Montrer que $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H si et seulement si c'est une famille de vecteurs de norme 1 qui vérifie

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = ||x||^2, \quad \forall x \in H$$

Solution : $\underline{\Rightarrow :}$ Si $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H, alors on a bien $||e_i||^2 = 1$ pour tout $i \in I$ et, par l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = ||x||^2, \quad \forall x \in H$$

$\underline{\Leftarrow :}$ Si on a

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = ||x||^2, \quad \forall x \in H$$

Alors en prenant, $x = e_i$, on a

$$||e_i||^2 = ||e_i||^2 + \sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} |\langle e_j, e_i\rangle|^2 = ||x||^2$$

Par conséquent,

$$\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}} |\langle e_j, e_i\rangle|^2 \quad \Rightarrow \quad |\langle e_j, e_i\rangle|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle e_j, e_i\rangle = 0$$

Donc la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée. Il nous ne reste plus qu'à montrer que cette famille est totale.
Soit $x \in (\text{vect}((e_i)_{i\in I}))^\perp$. Alors

$$||x||^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Donc $(\text{vect}((e_i)_{i\in I}))^\perp = \{0\}$, et ainsi $\overline{\text{vect}((e_i)_{i\in I})} = H$ et donc la famille $(e_i)_{i\in I}$ est totale, et par conséquent, une base hilbertienne.

Exercice : Théorème de représentation de Riesz-Fréchet
Soit $\varphi : H \to \mathbb{K}$ une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur un espace de Hilbert $(H, \langle .,. \rangle)$.
Montrer qu'il existe un unique vecteur $x \in H$ tel que, pour tout $y \in H$, $\varphi(y) = \langle y, x\rangle$, et que la norme de l'application linéaire φ vaut $||\varphi|| = ||x||$.

Solution :
$\underline{1^{er}\ \textit{cas} - \varphi = 0 :}$ On peut prendre $x = 0$.

$\underline{2^e\ \textit{cas} : \varphi \neq 0 :}$ Posons $K = \text{Ker}\varphi/$. Comme φ est continue, K est un sous-espace vectoriel fermé de H. De plus, on a $\dim H = 1$.
Prenons $x_0 \in K^\perp$ tel que $K^\perp = \mathbb{K}x_0$ et considérons la forme linéaire continue

$$\begin{aligned} \psi_{x_0} \ :\ & H \to \mathbb{K} \\ & y \mapsto \langle y, x_0\rangle \end{aligned}$$

On a $\text{Ker}\psi_{x_0} = x_0^\perp = (K^\perp)^\perp = K = \text{Ker}\varphi$. Par conséquent, ψ_{x_0} et φ sont proportionnelles (*i.e.*) il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall y \in H, \quad \varphi(y) = \alpha\langle y, x_0\rangle = \langle y, \overline{\alpha}x_0\rangle$$

Ce qui nous démontre l'existence. Montrons l'unicité.

Soit donc $x, x' \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \quad \langle y, x\rangle = \langle y, x'\rangle$$

Par suite,

$$\forall y \in H, \quad \langle y, x - x' \rangle = 0 \Rightarrow x - x' = 0$$

Ce qui nous démontre l'unicité. Enfin, pour la norme de l'application φ, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall y \in H, \quad |\varphi(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq ||x||||y||$$

On a égalité dans l'inégalité avec le cas particulier $y = x$. Par conséquent, $||\varphi|| = ||x||$.