Méthode de Laplace

Mohamed NASSIRI

Références :

Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière- p.349

Recasage :

• • • • • 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
• • • • • 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
• • • • • 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
• • • • ○ 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
• • • • ○ 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
• • • • ○ 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
• • • • ○ 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Résumé :

La méthode de Laplace illustre particulièrement bien le comportement asymptotique des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Prérequis :

Continuité et dérivabilité - Intégrale à paramètre - Développements asymptotiques

---

Théorème : Soit $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$, de classe C^2 et $f[a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi}f$ soit Lebesgue intégrable pour un certain t_0. On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$ et on pose $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x$
Si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ alors

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$$

Démonstration.
1) Montrons que F est bien définie :
φ est croissante, donc $\forall t \geq t_0$, $a \geq x \geq b$,

$$|e^{-t\varphi(x)}f(x)| = e^{-(t-t_0)\varphi(x)}|e^{-t_0\varphi(x)}f(x)| \leq e^{-(t-t_0)\varphi(a)}|e^{-t_0\varphi(x)}f(x)|$$

Donc $F(t)$ converge $\forall t \geq t_0$
Simplification : Sans perte de généralités, on peut $t_0 = 0$. On peut s'y ramener en remplçant $t - t_0$ par t et

$e^{-t_0\varphi}f$ par f.

2) Prenons $a=0$, $\varphi(x)=x^2$ et montrons que $F(t)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f(0)}{\sqrt{t}}$:
D'une part, comme f est continue en $a=0$, il existe $M>0$ et $\alpha\in]0,b[$ tel que $|f(x)|\leq M$ pour tout $x\in[0,\alpha]$. Alors pour tout $t>0$,

$$\sqrt{t}\int_0^{\alpha}e^{-tx^2}f(x)\mathrm{d}x\underbrace{=}_{u^2=tx^2}\int_0^{\alpha\sqrt{t}}e^{-u^2}f(\frac{u}{\sqrt{t}})\mathrm{d}u\xrightarrow[t\to+\infty]{}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}f(0)\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)$$

par convergence dominée, car $|e^{-u^2}f(\frac{u}{\sqrt{t}})\chi_{[0,\alpha\sqrt{t}]}(u)|\leq Me^{-u^2}$, $\forall u\geq 0$, $\forall t>0$.
D'autre part,

$$\left|\int_{\alpha}^{b}e^{-tx^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\leq e^{-t\alpha^2}\int_0^b|f(x)|\mathrm{d}x\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

donc $F(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f(0)}{\sqrt{t}}$.

3) Cas général : D'après les hypothèses, $\Phi:x\mapsto y=\sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}$ est un C^1-difféomorphisme de $[a,b[$ sur un intervalle $[0,\underbrace{\Phi(b)}_{:=c}[$.
En effet,

$$\Phi'(x)=\frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}}\underset{x\to a}{\sim}\frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{(x-a)^2\varphi''(a)/2}}=\frac{\varphi''(a)}{2}>0$$

On a ainsi $\varphi(x)=\varphi(a)+y^2$.

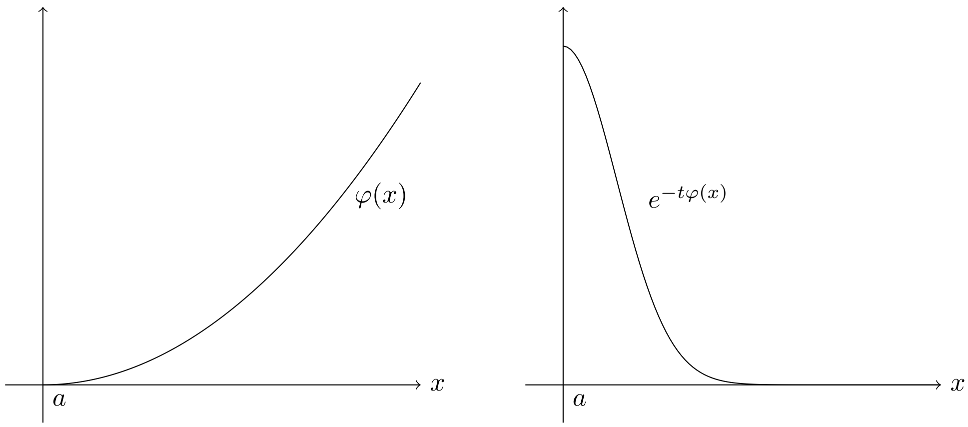
Soit $x=\Theta(y)$ l'application réciproque de Φ. Il vient :

$$\begin{aligned}F(t)=\int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x&=e^{-t\varphi(a)}\int_{a=\Theta(0)}^{b=\Theta(c)}e^{-ty^2}f(x)\mathrm{d}x\\&=e^{-t\varphi(a)}\int_0^c e^{-ty^2}f(\Theta(y))\Theta'(y)\mathrm{d}y\underset{t\to+\infty}{\sim}e^{-t\varphi(a)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f(\Theta(0))\Theta'(0)}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

De plus, on a $\Theta(0)=a$, et $\Theta'(0)=\frac{1}{(\Theta^{-1})'(\Theta(0))}=\frac{2}{\varphi''(a)}$. D'où le résultat. □

Remarques :

- On peut donner une interprétation assez simple de la méthode de Laplace. En remarquant que, pour t assez grand, la fonction $x\mapsto e^{-t\varphi(x)}$ décroit rapidement, la méthode de Laplace dit que *grosso modo* la contribution essentielle à l'intégrale provient d'un voisinage du point a qui est l'abscisse du maximum de la fonction $x\mapsto e^{-t\varphi(x)}$. Un dessin vaut mille mots (et surtout le baratin précédent ...).



- En fait, on peut même faire une démonstration *à la physicienne* ou *heuristique* pour retrouver la formule.

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x = e^{-t\varphi(a)} \int_a^b e^{-t(\varphi(x)-\varphi(a))} f(x)\mathrm{d}x$$

Et le développement de Taylor de φ suivant

$$\varphi(x) - \varphi(a) \sim (x-a)\underbrace{\varphi'(a)}_{=0} + \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(a)$$

nous donne

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x \sim e^{-t\varphi(a)} \int_a^b e^{-t\frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(a)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{y=\sqrt{t}(x-a)\sqrt{\varphi''(a)} \\ \mathrm{d}y=\sqrt{t}\mathrm{d}x\sqrt{\varphi''(a)}}}{=} e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-\frac{y^2}{2}} f\left(a + \frac{y}{\sqrt{t\varphi''(a)}}\right) \frac{1}{\sqrt{t\varphi''(a)}}\mathrm{d}y$$

où $c = \sqrt{t}(b-a)\sqrt{\varphi''(a)}$. Puis, lorsque $t \to +\infty$, on a $c \to +\infty$ et $f\left(a + \frac{y}{\sqrt{t\varphi''(a)}}\right) \to f(a)$. Ainsi,

$$e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-\frac{y^2}{2}} f\left(a + \frac{y}{\sqrt{t\varphi''(a)}}\right) \frac{1}{\sqrt{t\varphi''(a)}}\mathrm{d}y \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t\varphi''(a)}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}_{=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

- On peut utiliser la méthode de Laplace pour démontrer le résultat suivant :

Formule de Stirling :

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t}$$

.

Démonstration : Comme $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x$, on remarque que la fonction $x \mapsto x^t e^{-x}$ atteint son maximun en $x = t$, donc on peut s'attendre à ce que la contribution essentielle à l'intégrale provienne

d'un voisinage de ce point.
On a, en appliquant un changement de variable qui nous ramène à un maximum atteint en 0 :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x \underset{x=t(u+1)}{=} \int_{-1}^{+\infty} (t(u+1))^t e^{-t(u+1)} t\mathrm{d}u = t^{t+1}\int_{-1}^{+\infty} e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u$$

avec $\varphi(u) = 1 + u + \ln(u+1)$.
On peut appliquer la méthode de Laplace en remarquant que

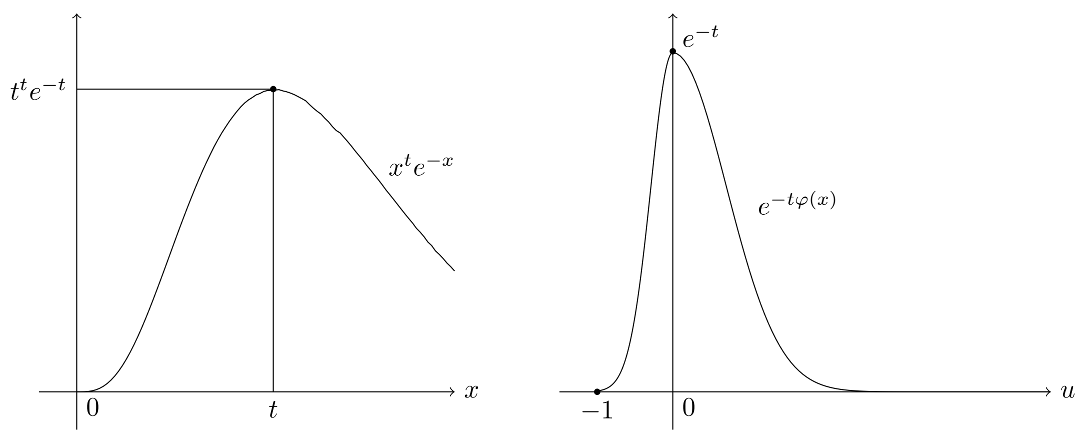
$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi''(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0 \\ f = 1 \\ t_0 > 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^{-t} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{0} e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^{-t}$$

Par conséquent,

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t}$$



$\square$