

Exemples de parties denses et applications.

Mohamed NASSIRI

La densité est une propriété topologique intéressante et très utile pour les démonstrations. Elle formalise la notion d'être très proche. On entend souvent "Par densité de Truc dans Machin, la propriété Bazar qui est vraie dans Truc est vraie dans Machin". Encore faut-il avoir un peu de continuité ...

Un des résultats les plus connus de densité est la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . Et en dimension supérieure, c'est le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ qui est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce dernier résultat permet d'obtenir que le polynôme caractéristique $\chi_{MN} = \chi_{NM}$ (avec $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et que $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $D\det(X)(H) = \text{tr}({}^t \text{com}(X)H)$.

Dans l'espace des fonctions, les résultats de densité sont très intéressants ! Dans l'espace des fonctions continues sur un compact $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ (donc avec (E, \mathcal{T}) un espace topologique compact), le théorème de Stone-Weierstrass donne une condition très simple pour qu'une sous-algèbre \mathcal{A} soit dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

La densité permet de prolonger des applications ! Par exemple, les fonctions uniformément continues définies sur un sous-espace dense H de E se prolonge à tout l'espace E . De plus, le prolongement est encore uniformément continue.

Du côté des formes linéaires, on a le théorème de Hahn-Banach qui permet de prolonger des formes linéaires définies sur un sous-espace (qui n'est pas nécessairement dense !). Ce théorème a un corollaire intéressant pour la densité : Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. Alors

H est dense dans E . \Leftrightarrow Toute $f \in E^*$ nulle sur H est identiquement nulle.

Dans les espaces L^p , la convolution va jouer un rôle important dans la densité. En effet, à partir des approximations de l'unité, on va pouvoir notamment montrer que l'espace des fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Pour finir, dans les espaces de Hilbert, la notion quasi-omniprésente. En tout cas, dès que l'on parle de bases hilbertiennes, on a automatiquement de la densité par définition de ces dernières. En effet, pour qu'une base $(e_i)_{i \in I}$ d'un espace de Hilbert H soit hilbertienne, en plus d'être orthonormée, elle doit être totale, c'est-à-dire dire que $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans H . Par exemple, la convergence d'une série de Fourier $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$ vers f n'est pas toujours garantie. Un cas particulier est donné par l'espace L^2 . Dans cet espace, en notant, $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, si bien que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

Le "dans $L^2_{2\pi}$ " est très important ! Cette relation n'est pas toujours vraie en l'appliquant en un point x !

Références

- [ML3a] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
- [ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
- [ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani Mohammed
- [NEHH] Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Nawfal El Hage Hassan
- [ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
- [OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠
- [FGNag1] Algèbre 1 Orlaux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

- Théorème de Riesz-Fischer
- Théorème de Féjer
- De la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < +\infty$)

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 1 Soient A et B des parties d'un espace topologique E . On dit que A est dense dans B , lorsque $B \subset \overline{A}^E$, ou, ce qui est équivalent, lorsque tout ouvert de E contenant un point de B rencontre A .

1 Densité en dimension finie

1.1 Densité dans \mathbb{K} [GOUan] p.197-198

Proposition 2 \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .
 $\mathbb{Q}[i]$ est dense dans \mathbb{C} .

Proposition 3 Un sous-groupe additif de \mathbb{R} est soit discret (et de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$), soit dense dans \mathbb{R} .

En particulier, un sous-groupe fermé de \mathbb{R} est soit \mathbb{R} , soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Corollaire 4 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $a/b \notin \mathbb{Q}$.

1.2 Densité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 5 Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Application 6 Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\chi_{MN} = \chi_{NM}$$

Application 7 L'application déterminant est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D \det(X)(H) = \text{tr}({}^t \text{com}(X)H)$$

[ROU] p.74 – 75 → 331

Théorème 8 ♠ De la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ♠

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application

$$f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ X \mapsto \text{Tr}(AX)$$

induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$

• Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $f(XY) = f(YX)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(X) = \lambda \text{Tr}(X)$.

• $\forall n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$. [FGNag1] p.329 → 331

2 Densité et espaces de fonctions

2.1 Fonctions continues sur un compact [ML3an] p.141 → 144

Proposition 9 La suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} P_0 & = 0 \\ P_{n+1}(u) & = P_n(u) + \frac{1}{2}(u - P_n^2(u)) \quad \forall u \in [0, 1] \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$.

Théorème 10 Théorème de Stone-Weierstrass (forme réelle)

Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique compact. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) Pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

(ii) Les fonctions constantes appartiennent à \mathcal{A} .
 Alors, \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 11 Théorème de Stone-Weierstrass (forme complexe)

Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique compact. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) Pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

(ii) Les fonctions constantes appartiennent à \mathcal{A} .

(iii) Pour toute fonction f de \mathcal{A} , la fonction conjuguée \bar{f} est dans \mathcal{A} .

Alors, \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 12 ♠ Théorème de Weierstrass ♠

Soit I un segment de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Alors f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme. [GOUan] p.284 → 286

Théorème 13 ♠ Théorème de Féjer ♠

En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} S_N(f)$, on a
 Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \text{ et}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$$

[ELAM2] p.185-186, 190-191

Remarque 14 Les deux précédents théorèmes utilisent dans leur démonstration la convolution qui est définie plus loin.

2.2 Prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense [ML3an] p.95-96

Théorème 15 Soient (E, d_E) un espace métrique, (F, d_F) un espace métrique complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F . Alors il existe une unique application continue \tilde{f} de E dans F qui coïncide avec f sur A . De plus, \tilde{f} est aussi uniformément continue.

Application 16 Soient F un espace de Banach et $\mathcal{E}([a, b], F)$ l'espace des fonctions en escalier de $[a, b]$ à valeurs dans F muni de la norme uniforme. L'application

$$\mathcal{I} : \mathcal{E}([a, b], F) \rightarrow F$$

$$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

est une application linéaire continue. L'espace $\mathcal{E}([a, b], F)$ est dans l'espace $\mathcal{R}([a, b], F)$ des fonctions en réglées sur $[a, b]$. Ainsi, l'application \mathcal{I} se prolonge à $\mathcal{R}([a, b], F)$ en une application uniformément continue, ce qui permet de définir l'intégrale de Riemann d'une fonction f de $\mathcal{R}([a, b], F)$, comme la valeur en f du prolongement.

2.3 Prolongement des formes linéaires [NEHH] p.308 → 314

Définition 17 Soient E un \mathbb{K} -e.v. et $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

(i) On dit que p est positivement homogène si pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geq 0$, on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

(ii) On dit que p est sous-additive si pour tout $x, y \in E$, on a $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

Théorème 18 Théorème de Hahn-Banach

Soient E un \mathbb{R} -e.v. et $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire \tilde{f} sur E prolongeant f (i.e.) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $|\tilde{f}(x)| = p(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème 19 Théorème de Hahn-Banach

Soient E un \mathbb{K} -e.v. et $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $|f(x)| \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire \tilde{f} sur E prolongeant f (i.e.) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $|f(x)| = p(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème 20 Théorème de Hahn-Banach

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et \mathbb{K} -e.v. et H un sous-espace vectoriel de E muni de la norme induite. Pour tout $f \in H^*$, il existe $\tilde{f} \in E^*$ dont la

restriction à H soit f et telle que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Bien entendu, si H est dense dans E , \tilde{f} est unique.

Corollaire 21 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors on a :

1) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe une forme linéaire continue f de E telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. En particulier, si $E \neq \{0\}$, alors on a $E^* \neq \{0\}$

2) Soient $x, y \in E$. Si pour tout $g \in E^*$, on a $g(x) = g(y)$, alors $x = y$.

Corollaire 22 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, H un sous-espace vectoriel de E , et $x \in E \setminus \overline{H}$. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\| = 1$, $f(x) = d(x, H) \neq 0$ et $f(H) = 0$.

Corollaire 23 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et H un sous-espace vectoriel de E . Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) H est dense dans E .

(ii) Toute $f \in E^*$ nulle sur H est identiquement nulle.

2.4 Espaces $L^p(\mathbb{R})$ [FAR] p.113 → 124

Définition 24 Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle translatée de f par a la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\tau_a f)(x) = f(x - a)$$

Proposition 25 (i) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, alors $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.

(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$

Théorème 26 $L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$:

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour presque tout x , l'application $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable.

La fonction $f * g$, qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y) dy$$

est intégrable, et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Théorème 27 $L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$:

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.

Pour presque tout x , l'application $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable.

La fonction $f * g$, qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y) dy$$

appartient à $L^p(\mathbb{R})$, et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Théorème 28 $L^1(\mathbb{R}) * C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.
La fonction $f * g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Théorème 29 $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
La fonction $f * g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Proposition 30 L'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$ n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution. [ELAM2] p.85

Définition 31 On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de fonctions mesurables positives sur \mathbb{R} telles que

$$(i) \forall j \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x) dx = 1$$

$$(ii) \forall \epsilon > 0, \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{|x| > \epsilon} \varphi_j(x) dx = 0$$

[ELAM2] p.86

Exemple 32

Approximation de Laplace : $\varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}$

Approximation de Cauchy : $\varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1 + j^2 x^2}$

Approximation de Gauss : $\varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2 x^2}{2}}$

[ELAM2] p.86

Théorème 33 Théorème d'approximation
Soit $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$.

(i) Si f est uniformément continue sur \mathbb{R} et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$. [ELAM2] p.87

Proposition 34 (i) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'$$

(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}$$

[FAR] p.123-124

Théorème 35 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$. [FAR] p.125

3 Espaces de Hilbert et bases hilbertiennes

Définition 36 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de H est dite

1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$

2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)

3) totale si $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans H .

On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H . [ML3an] p.331

Proposition 37 1) Toute famille orthormée est libre

2) $(e_i)_{i \in I}$ est une famille totale si et seulement si la condition $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$ implique $x = 0$. [ML3an] p.331

Définition 38 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. [OBJ] p.110

Théorème 39 ♠ Base hilbertienne des polynômes orthogonaux ♠ Soit I un intervalle de \mathbb{R} et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$. [OBJ] p.140 → 143

3.1 Application aux séries de Fourier

Définition-Proposition-Rappels 40 (i) $L_{2\pi}^2$, l'ensemble des fonctions de L^2 et 2π -périodiques sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} , muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

est un espace de Hilbert. [ELAM2] p.170 → 194

(ii) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de H est dite

1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$

2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)

3) totale si $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans H .

On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H . [ML3an] p.331

(iii) 1) Toute famille orthormée est libre

2) $(e_i)_{i \in I}$ est une famille totale si et seulement si la condition $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$ implique $x = 0$. [ML3an] p.331

Théorème 41 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'application définie par

$$e_n(x) = e^{inx}$$

Le système trigonométrique $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Définition 42 Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f)$ donné par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f .

Théorème 43 Formule de Parseval

Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors

1) $(S_N(f))$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Questions

Exercice : 1) Montrer que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

2) Soit G un sous-groupe additif de \mathbb{R} . Montrer que G est soit discret (et de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$), soit dense dans \mathbb{R} (En particulier, un sous-groupe fermé de \mathbb{R} est soit \mathbb{R} , soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$).

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $a/b \notin \mathbb{Q}$.

4) *Application :*

Soit f une application de \mathbb{R} dans un ensemble E . Une période de f est un réel p tel que $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(f)$ des périodes de f est soit discret, soit dense dans \mathbb{R} .

b) Quelques (contre-)exemples :

i) Donner un exemple de fonction qui admet un groupe de périodes discret, puis un exemple de groupe de périodes dense.

ii) Donner un exemple de fonction non constante pour laquelle $\mathcal{P}(f)$ est dense dans \mathbb{R} .

c) Montrer que, si f est continue, alors $\mathcal{P}(f)$ est un fermé de \mathbb{R} .

d) Montrer que l'ensemble des périodes $\mathcal{P}(f)$ d'une application continue f soit est $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$ et f est constante, soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ telle que $\mathcal{P}(f) = \alpha\mathbb{Z}$.

Solution : 1) Nous allons utiliser la fonction partie entière E . Par définition de cette fonction, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$E(x) \leq x \leq E(x) + 1$$

Ainsi, pour $k = 1, \dots, n$, on a donc

$$E(kx) \leq kx \leq E(kx) + 1 \Rightarrow kx - 1 \leq E(kx) \leq kx$$

Puis, en sommant cet encadrement pour k variant de 1 à n , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (kx - 1) &\leq \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \sum_{k=1}^n kx \\ \Leftrightarrow x \frac{n(n+1)}{2} - n &\leq \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \frac{n(n+1)}{2} x \\ \Leftrightarrow x \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} x \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$, par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) = \frac{x}{2}$$

En notant $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$, chaque u_n est un rationnel (le numérateur et le dénominateur sont des entiers). Comme la suite (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$, alors la suite de rationnels $(2u_n)$ tend vers x . Chaque réel $x \in \mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels, donc \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

2) Considérons $G_+^* := G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha = \inf G_+^*$. On distingue deux cas :

- Si $\alpha > 0$: Alors $\alpha \in G_+^*$. En effet, si $\alpha \notin G_+^*$, on a par définition de la borne inférieure

$$\exists m, n \in G_+^*, \quad \alpha < m < n < 2\alpha$$

donc $0 < n - m < \alpha$, et comme G est un groupe additif, $n - m \in G_+^*$, ce qui est absurde car $\alpha = \inf G_+^*$.

Comme $\alpha = \inf G$ et que G est un groupe, on a $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in G$. Si n est la partie entière de x/α , on a

$$\alpha n \leq x < \alpha(n+1) \Rightarrow 0 \leq x - \alpha n < \alpha$$

Comme $x - \alpha n \in G$, ceci entraîne $x - \alpha n = 0$ car $\alpha = \inf G_+^*$, autrement dit $x = \alpha n \in \alpha \mathbb{Z}$. Donc $G = \alpha \mathbb{Z}$.

- Si $\alpha = 0$: Montrons que G est dense dans \mathbb{R} . Soit $m < n$ deux nombres réels. Comme $0 = \inf G_+^*$, il existe $x \in G$ tel que $0 < x < n - m$, et alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m < px < n$. En effet, en posant $p = E\left(\frac{m}{x}\right) + 1$, on a donc

$$p - 1 \leq \frac{m}{x} < p \Rightarrow (p - 1)x \leq m < px$$

Ainsi,

$$m < px \leq (p - 1)x + x \leq m + x < m + (n - m) = n$$

Donc $]m, n[\cap G \neq \emptyset$, et ceci quelque soit l'intervalle ouvert $]m, n[$ de \mathbb{R} , d'où la densité de G dans \mathbb{R} .

3) L'ensemble $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

\Rightarrow : Supposons $a/b \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers non nuls premiers entre eux p et q tels que $a/b = p/q$. On a donc

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\left(\mathbb{Z} + \frac{a}{b}\mathbb{Z}\right) = b\left(\mathbb{Z} + \frac{p}{q}\mathbb{Z}\right) = \frac{b}{q}(q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}) = \frac{b}{q}\mathbb{Z}$$

Ainsi, G n'est pas dense dans \mathbb{R} . Absurde! Donc $a/b \notin \mathbb{Q}$.

\Leftarrow : Supposons $a/b \notin \mathbb{Q}$ et G non dense dans \mathbb{R} . Alors, par la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G = \alpha \mathbb{Z}$. En particulier, $a \in G$, donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \alpha p$. De même, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = \alpha q$. Donc $a/b = p/q \in \mathbb{Q}$. Absurde! G est donc dense dans \mathbb{R} .

4)a) Comme $\mathcal{P}(f)$ est un sous-groupe additif de \mathbb{R} . On en déduit la réponse grâce à question 2).

b)i) Les fonctions *sin* et *cos* possèdent un groupe de périodes discret.

Les fonctions constantes vérifient $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$ et donc on a un groupe de périodes dense dans \mathbb{R} .

ii) La fonction caractéristique de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , notée $\chi_{\mathbb{Q}}$, vérifie $\mathcal{P}(\chi_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\mathcal{P}_x = \{p \in \mathbb{R} \mid f(p + x) = f(x)\}$$

est un fermé. En effet, c'est l'image réciproque du singleton $\{f(x)\}$ par l'application continue $p \mapsto f(x + p)$ (composée d'applications continues). Puis, on a

$$\mathcal{P}(f) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{P}_x$$

qui est fermé (comme intersection de fermés).

d) Comme $\mathcal{P}(f)$ est un sous-groupe additif fermé de \mathbb{R} . On en déduit la réponse grâce à question 2) (cas particulier).

Exercice : Théorèmes de Hahn-Banach

1) *Version 1* : Soient E un \mathbb{R} -e.v. et $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire \tilde{f} sur E prolongeant f (i.e.) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $\tilde{f}(y) = p(y)$ pour tout $y \in E$.

2) *Version 2* : Soient E un \mathbb{K} -e.v. et $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $|f(x)| \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire \tilde{f} sur E prolongeant f (i.e.) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $|\tilde{f}(x)| = p(x)$ pour tout $x \in E$.

3) *Version 3* : Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et \mathbb{K} -e.v. et H un sous-espace vectoriel de E muni de la norme induite. Pour tout $f \in H^*$, il existe $\tilde{f} \in E^*$ dont la restriction à H soit f et telle que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Bien entendu, si H est dense dans E , \tilde{f} est unique.

Solution : 1) Etape 1 : Montrons d'abord que si $a \in E \setminus H$, alors il existe une application linéaire $g : H \oplus \mathbb{R}a \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f telle que pour tout $z \in H \oplus \mathbb{R}a$, on ait $g(z) \leq p(z)$.
 Soit donc $z \in H \oplus \mathbb{R}a$, il existe un unique couple $(x, t) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $z = x + ta$.
 → Comme on souhaite que g soit linéaire, on doit nécessairement avoir $g(z) = g(x) + tg(a)$.
 → Comme on souhaite que g prolonge f , on doit nécessairement avoir $g(x) = f(x)$.
 On est donc amené à considérer $g(z) = f(x) + tg(a)$.
 On a donc $\alpha = g(a)$ et on veut de plus $g(z) \leq p(z)$ (i.e.) $f(x) + t\alpha \leq p(x + ta)$.
 Finalement, on cherche donc à déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in H$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) + t\alpha \leq p(x + ta)$.

Montrons, qu'en fait, il suffit de trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in H$, on ait

$$\begin{cases} f(x) - \alpha \leq p(x - a) \\ f(y) + \alpha \leq p(y + a) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) - p(x - a) \leq \alpha \leq p(y + a) - f(y)$$

En effet, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in H$, on ait

$$f(x) - p(x - a) \leq \alpha \leq p(y + a) - f(y)$$

. Soit $t > 0$, on obtient donc

$$\begin{cases} f(x) - t\alpha = t \left(f\left(\frac{x}{t}\right) - \alpha \right) \leq tp\left(\frac{x}{t} - a\right) = p(x - ta) \\ f(x) + t\alpha = t \left(f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha \right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + a\right) = p(x + ta) \end{cases}$$

Existence de α :

Pour tout $x, y \in H$, on a

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - a) + p(y + a)$$

D'où

$$f(x) - p(x - a) \leq p(y + a) - f(y)$$

Par suite,

$$\sup_{x \in H} \{f(x) - p(x - a)\} \leq \inf_{y \in H} \{p(y + a) - f(y)\}$$

Ainsi, en prenant

$$\alpha \in \left[\sup_{x \in H} \{f(x) - p(x - a)\}, \inf_{y \in H} \{p(y + a) - f(y)\} \right]$$

on obtient le résultat voulu.

Etape 2 : On considère l'ensemble \mathcal{E} des couples (N, g) où N est un sous-espace vectoriel de E contenant \bar{H} , $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire qui prolonge f et pour tout $x \in N$, $g(x) \leq p(x)$.
 L'ensemble $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $(H, f) \in \mathcal{E}$. On ordonne \mathcal{E} comme suit

$$(N, g) \leq (N', g') \Leftrightarrow N \subset N' \text{ et } g'_N = g$$

On obtient ainsi une relation d'ordre sur \mathcal{E} . Montrons que \mathcal{E} est inductif (i.e.) toute partie totalement ordonnée de \mathcal{E} possède un majorant.

Soit $(N_i, g_i)_{i \in I}$ une partie, indexée par I , totalement ordonnée de \mathcal{E} . Alors pour tout $i, j \in I$, soit on a $(N_i, g_i) \leq (N_j, g_j)$, soit on a $(N_j, g_j) \leq (N_i, g_i)$.

Soit $N = \cup_{i \in I} N_i$, alors pour tout $x \in N$, il existe $i \in I$ tel que $x \in N_i$ et on pose $g(x) = g_i(x)$. Alors, on a :

- N est un sous-espace vectoriel de E .
- g est bien définie.
- $(N, g) \in \mathcal{E}$.
- $(N_i, g_i) \leq (N, g)$ pour tout $i \in I$.

Ainsi, (N, g) est un majorant de \mathcal{E} de $(N_i, g_i)_{i \in I}$ donc \mathcal{E} est inductif. Par le lemme de Zorn, \mathcal{E} possède un élément maximal (\tilde{N}, \tilde{f}) . Par l'étape 1, on a $\tilde{N} = E$.

2) Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Pour tout $x \in H$, on a

$$f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$$

Par le théorème de Hahn-Banach *version 1*, il existe une forme linéaire \tilde{f} sur E qui prolonge f telle que pour tout $x \in E$, on ait $\tilde{f}(x) \leq p(x)$. D'où

$$-p(x) = -p(-x) \leq -\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x) \leq p(x)$$

Par conséquent, on a $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: On aura besoin d'un résultat intermédiaire ... En effet, en considérant $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{C} -e.v.n., c'est en particulier en \mathbb{R} -e.v.n. ! Il y a donc deux notions différentes de dual topologique pour E :

- le dual en tant que \mathbb{R} -e.v. $E_{\mathbb{R}}^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
- le dual en tant que \mathbb{C} -e.v. $E_{\mathbb{C}}^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$

Heureusement, il est possible d'identifier ces deux espaces :

Proposition : On note $\Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application \mathbb{R} -linéaire qui à un nombre complexe $a + ib$ associe sa partie réelle a ($a, b \in \mathbb{R}$).

Alors l'application

$$\begin{aligned} T : E_{\mathbb{C}}^* &\rightarrow E_{\mathbb{R}}^* \\ f &\mapsto \Re \circ f \end{aligned}$$

est \mathbb{R} -linéaire, bijective et isométrique. L'application inverse T^{-1} est définie par :

Pour tout $g \in E_{\mathbb{R}}^*$, on a $T^{-1}(g)(x) = g(x) - ig(ix)$, pour tout $x \in E$.

Démonstration :

T est clairement \mathbb{R} -linéaire. Montrons que T est isométrique.

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. On a

$$|T(f)(x)| = |\Re(f(x))| \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|f\|$$

Donc $\|T(f)\| \leq \|f\|$. Par ailleurs, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{i\theta}|f(x)|$, d'où $f(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$, et donc

$$T(f)(e^{-i\theta}x) = (\Re \circ f)(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$$

Comme on a $\|e^{-i\theta}x\| = |e^{-i\theta}|\|x\| = \|x\| \leq 1$, alors $\|T(f)\| \geq |f(x)|$. Donc $\|T(f)\| \geq \|f\|$, d'où $\|T(f)\| = \|f\|$.

On en déduit que T est injective.

Soit $g \in E_{\mathbb{R}}^*$, pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Alors $f \in E_{\mathbb{C}}^*$ et on a $T(f) = g$, donc T est surjective. Par conséquent, T est bijective. □

Revenons à notre théorème de Hahn-Banach *version 2* ... Par notre petit aparté, il existe une application \mathbb{R} -linéaire $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Par ailleurs, on a aussi $|g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in H$.

Par le premier cas, il existe $\tilde{g} : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathbb{R} -linéaire qui prolonge g telle que pour tout $x \in E$, on ait $|\tilde{g}(x)| \leq p(x)$. Pour tout $x \in E$, soit $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$, alors \tilde{f} est une forme linéaire sur E qui prolonge f .

Montrons que pour tout $x \in E$, on a $\tilde{f}(x) \leq p(x)$. Soit $x \in E$.

Si $\tilde{f}(x) = 0$, alors l'inégalité est triviale.

Si $\tilde{f}(x) \neq 0$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(x) = e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|$, d'où $\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = |\tilde{f}(x)| \geq 0$. Donc, on obtient

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{g}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$$

3) Pour tout $x \in E$, on pose $p(x) = \|f\| \|x\|$. Alors p est une semi-norme sur E , et pour tout $x \in H$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| = p(x)$$

Par le théorème de Hahn-Banach *version 2*, il existe une forme linéaire \tilde{f} sur E qui prolonge f telle que pour tout $x \in E$, on ait $\tilde{f}(x) \leq p(x) = \|f\| \|x\|$. Donc \tilde{f} est continue et on a $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. D'autre part,

pour tout $x \in H$, on a

$$|f(x)| = |\tilde{f}(x)| \leq \|\tilde{f}\| \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \|\tilde{f}\|$$

Donc, on a $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$