

Convergence des méthodes itératives

Mohamed NASSIRI

Référence :

Modélisation à l'oral de l'Agrégation : Calcul scientifique, Laurent Dumas, p.167 → 169
[FILB] Analyse numérique : Algorithmes et étude mathématique, Francis Filbet, p.36 → 38

Recasage :

- 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- 233 : Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.
- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équation.
- 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Résumé :

Blabla

Prérequis :

Méthode itératives - Normes matricielles subordonnées - Rayon spectral - Théorème de Schur

Théorème : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Si $(M, N) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est tel que l'on a la décomposition dite *décomposition régulière* $A = M - N$, on dit que la méthode itérative associée à (M, N) converge si pour tout $u_0 \in \mathbb{K}^n$, la suite de premier terme u_0 et définie par $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$$

converge.

La méthode itérative associée à (M, N) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Démonstration.

Etape 1 - Vous prendrez bien un petit lemme avant de commencer :

Lemme : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée ou non. Alors

$$\rho(A) \leq |||A|||$$

(ii) Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\epsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$|||A||| \leq \rho(A) + \epsilon$$

Par le théorème de Schur (procédé de triangularisation d'une matrice complexe), il existe $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$T = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $\delta > 0$ choisi tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i} |t_{i,j}| \leq \epsilon$$

On note alors

$$D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \delta & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$T_\delta = D_\delta^{-1}TD_\delta = (UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{1,2} & \dots & \delta^{n-1}t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On définit la norme suivante : pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$|||B||| = \max\{\|(UD_\delta)^{-1}B(UD_\delta)x\|_\infty ; x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty = 1\}$$

Par construction, on a donc

$$|||A||| \leq \rho(A) + \epsilon$$

et cette norme est subordonnée pour la norme sur \mathbb{K}^n suivante

$$\|x\| = \|(UD_\delta)^{-1}x\|_\infty$$

En effet,

$$\begin{aligned} |||B||| &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|(UD_\delta)^{-1}B(UD_\delta)x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \\ &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|(UD_\delta)^{-1}By\|_\infty}{\|(UD_\delta)^{-1}y\|_\infty} \quad \text{avec } x = (UD_\delta)^{-1}y \\ &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|By\|}{\|y\|} \end{aligned}$$

Démonstration :

□

Etape 2 - Sens indirect :

On note $e_k = u_k - u$ l'erreur d'approximation au rang $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$e_k = (M^{-1}Nu_{k-1} + M^{-1}b) - (M^{-1}Nu + M^{-1}b) = M^{-1}Ne_{k-1}$$

Par récurrence immédiate sur k , on a donc

$$e_k = (M^{-1}N)^k e_0$$

Puisque, par hypothèse, $\rho(M^{-1}N) < 1$, on peut donc, par le lemme, construire une norme subordonnée $|||\cdot|||$ telle que $|||M^{-1}N||| < 1$. En particulier, pour la norme vectorielle associée, on a donc

$$||e_k|| = |||(M^{-1}N)^k||| e_0||$$

et la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge bien vers 0.

Etape 3 - Sens direct :

Supposons que $\rho(M^{-1}N) \geq 1$.

Soit $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre complexe de $M^{-1}N$ associée à une valeur propre λ de module supérieur ou égal à 1. Alors la méthode itérative ne converge pas en partant de l'une des valeurs $u_0 = u + \tilde{u}_1$ ou $u_0 = u + \tilde{u}_2$. En effet, on a (on fait la démonstration avec $u_0 = u + \tilde{u}_1$)

$$M^{-1}N(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2) = \lambda(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2) \Rightarrow (M^{-1}N)^k(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2) = \lambda^k(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2)$$

En particulier, $(M^{-1}N)^k \tilde{u}_1 = \lambda^k \tilde{u}_1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} e_k &= (M^{-1}N)^k e_0 = (M^{-1}N)^k (u_0 - u) \\ &= (M^{-1}N)^k (u + \tilde{u}_1 - u) \\ &= (M^{-1}N)^k \tilde{u}_1 \\ &= \lambda^k \tilde{u}_1 \end{aligned}$$

Ce qui implique (puisque $|\lambda| \geq 1$)

$$||e^k|| = |\lambda|^k ||\tilde{u}_1|| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

□

Remarques :

- **Remarque 1 :**
- **Remarque 2 :**

Théorème : Soit A une matrice hermitienne symétrique définie positive, décomposée sous la forme

$$A = M - N, \quad M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

Si la matrice $(\overline{M} + N)$ est définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

Démonstration :

□

