

Convergence des séries entières, propriétés de la somme.

Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Parmi les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$, avec, pour tout n , f_n est une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , on peut s'intéresser au cas particulier où, pour une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée à valeurs dans \mathbb{C} ,

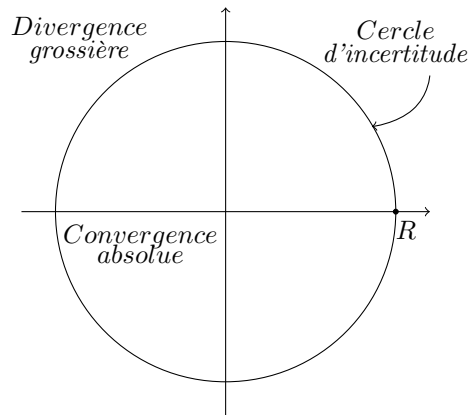
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto a_n z^n$$

Un premier résultat, le lemme d'Abel, nous permet d'introduire la notion de *rayon* et *disque de convergence*. On peut résumer la situation par le schéma ci-dessous.

Pourquoi parle-t-on de *cercle d'incertitude*? En particulier, pour les trois raisons suivantes...

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Sur le cercle $C(0, R)$, la série peut être :

- Divergente en tout point : $R = 1$, $\sum_{n > 0} z^n$ diverge grossièrement en tout point de $C(0, 1)$.
- Divergente en certains points : $R = 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ diverge pour $z = 1$ et converge en tout point de $C(0, 1) \setminus \{1\}$ (série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ avec $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$)
- Convergente en tout point : $R = 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument en tout point de $C(0, 1)$



Malgré ce léger inconvénient, les séries entières ont de très bonnes propriétés. On pourra notamment les sommer, les "multiplier", les dériver, etc. Ici, on parle de multiplication au sens de *produit de Cauchy* :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \quad \boxed{\times} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$$

<p><u>Produit de Cauchy</u></p> $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n \quad \text{avec } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$	<p><u>Produit de Hadamard</u></p> $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n \quad \text{avec } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = a_n b_n$
---	--

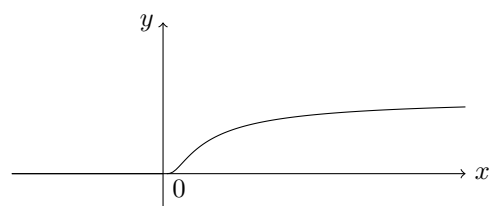
Les formules de Cauchy et l'égalité de Parseval nous permettent de caractériser les fonctions constantes et polynômes à partir de la "bornitude" de la somme de la série entière.

Les bonnes propriétés précédemment évoquées vont également nous permettre de parler de *fonctions développables en série entière*. Sous certaines conditions, il arrive que cette fonction coïncide avec sa série dite de Taylor $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$.

Être seulement de classe C^∞ ne suffit pas comme le montre la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(pour tout n , on a $f^{(n)}(0) = 0$)



Les applications à l'analyse complexe sont intéressantes. Le fait que les fonctions holomorphes sont analytiques nous donne le très important *principe des zéros isolés*, duquel découle le *principe du prolongement analytique*. Concernant les applications à la combinatoire, on retiendra le résultat original suivant : le nombre de dérangements de \mathfrak{S}_n est

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Les équations différentielles permettent également de trouver des développements en série entière mais l'inverse est aussi possible : on peut résoudre certaines équations différentielles à l'aide des séries entières. Par exemple, il existe une unique solution à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (E)$$

développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. C'est

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Références

- [GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
 [DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
 [ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
 [HMQUE] Analyse complexe et applications, Martine Queffélec et Hervé Queffélec ♠
 [FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Principe des zéros isolés
 Résolution de l'équation de Bessel

1 Séries entières, rayon et disque de convergence.

1.1 Définitions et premières propriétés [GOUan] p.236-237

Définition 1 On appelle *série entière* de variable complexe, toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

où z est une variable complexe et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans \mathbb{C} .

Proposition 2 *Lemme d'Abel*

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors

- (i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente ;
 (ii) $\forall r > 0, 0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Définition 3 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.
 Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé

disque de convergence de la série entière.
 Si $R = +\infty$, la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ définit une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} appelée fonction entière.

Proposition 4 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors

- (i) Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,
 (ii) Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.
 (iii) $\forall r > 0, 0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Proposition 5 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

- (i) Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $R \geq 1$.
 (ii) Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R \leq 1$. [DTZ] p.316

Exemple 6 Pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par a_n est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers positifs inférieurs ou égaux à n , le rayon de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est égal à 1. [DTZ] p.316-317

1.2 Règles de calcul du rayon de convergence [DTZ] p.317 → 319

Proposition 7 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans \mathbb{C} et $\alpha > 0$. Alors les séries

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} n^\alpha a_n z^n, \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^\alpha} z^n$$

ont le même rayon de convergence.

Proposition 8 Règle de D'Alembert

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de variable réelle ou complexe. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in [0, +\infty]$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est

$$R = \frac{1}{\lambda}$$

(Convention : $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Exemple 9 • La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

• Pour tout $\alpha > 0$, la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

• La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n! z^n$ a un rayon de convergence nul. [GOUan] p.237

Proposition 10 Règle de Cauchy

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \in [0, +\infty]$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est

$$R = \frac{1}{\lambda}$$

(Convention : $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Remarque 11 On ne peut pas toujours appliquer les règles de D'Alembert et de Cauchy. Exemple : $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^{2n}$. [GOUan] p.237

1.3 Somme et produit de Cauchy de séries entières [GOUan] p.324-325

Définition 12 On appelle série entière somme de deux séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$, la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 13 Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à R_a et R_b . On note f et g les sommes de ces séries entières sur leur disque de convergence D_a et D_b .

Le rayon de convergence R_{a+b} de la série entière somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

- (i) $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$,
- (ii) $R_{a+b} = \min\{R_a, R_b\}$ si $R_a \neq R_b$.

De plus, sur $D_a \cap D_b$, $f + g$ est la somme de la série entière somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$.

Définition 14 On appelle produit de Cauchy de deux séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$, la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Proposition 15 Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à R_a et R_b . On note f et g les sommes de ces séries entières sur leur disque de convergence D_a et D_b .

Le rayon de convergence R_c du produit de Cauchy $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ vérifie :

$$R_c \geq \min\{R_a, R_b\},$$

De plus, sur $D_a \cap D_b$, fg est la somme de la série entière somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ (i.e.)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

2 Propriétés des séries entières

2.1 Continuité et dérivation [GOUan] p.238-239

Théorème 16 L'application $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Proposition 17 Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n$$

est convergente. Alors la série entière de variable t , $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ et la somme est continue sur ce segment. [DTZ] p.321-322

Théorème 18 L'application

$$f :] - R, R[\rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

est de classe C^1 . La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, et on a

$$\forall x \in] - R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Corollaire 19 La somme f de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $] - R, R[$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $] - R, R[$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En outre,

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

Corollaire 20 Soit f la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R . Alors la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et si F désigne la somme de cette dernière, on a $F' = f$ sur $] -R, R[$.

2.2 Principe des zéros isolés [GOUan] p.239

Théorème 21 Principe des zéros isolés
Soit f la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ sur son disque de convergence. S'il existe une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes non nuls tendant vers 0 telle que $f(z_p) = 0$ pour tout p , alors $a_n = 0$ pour tout n .

Corollaire 22 Si les sommes f et g de deux séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ vérifient $f(z_p) = g(z_p)$ pour une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes non nuls tendant vers 0, alors $a_n = b_n$ pour tout n . En particulier, deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R} sont égales.

2.3 Formule de Cauchy et égalité de Parseval [GOUan] p.239-240

Théorème 23 Formule de Cauchy
Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors

$$\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{N}, 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$$

Application 24 Théorème de Liouville
Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et f la somme de cette série entière.

(i) Si la fonction entière f est bornée sur \mathbb{C} , alors f est constante.

(ii) Plus généralement, s'il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme.

Théorème 25 Egalité de Parseval
Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors $\forall r \in]0, R[$, la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Application 26 Soit f la somme de cette série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur

ou égal à 1 telle que $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction entière f est bornée sur le disque unité, alors f est un polynôme.

3 Développement en série entière

3.1 Fonctions développables en série entière [GOUan] p.240-241

Définition 27 Une fonction (de la variable réelle ou complexe) à valeurs complexes définie dans un voisinage de 0 est dite développable en série entière sur un voisinage de 0 si sur ce voisinage, f coïncide avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

Proposition 28 Développement en série entière des fractions rationnelles

Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(z - z_0)^p} = -\frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!} \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p+1)!} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$$

Proposition 29 Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

tende simplement vers 0 sur $] -\alpha, \alpha[$. La série entière

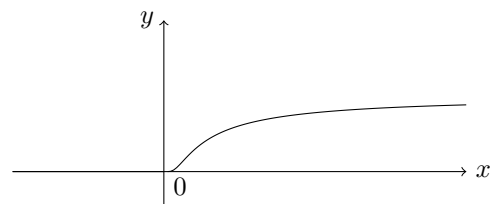
$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

a alors un rayon de convergence supérieur ou égal à α et f est égale à la somme de cette série entière sur $] -\alpha, \alpha[$.

Exemple 30 La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor (pour tout n , on a $f^{(n)}(0) = 0$).



Proposition 31 Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant un voisinage de 0, une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ et R_n l'application définie comme précédemment. Alors

$$\forall x \in I, |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x)|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

où pour tout n et pour tout $x \in I$, $M_{n+1}(x)$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[0, x]$ si x est positif et $[x, 0]$ si x est négatif. [DTZ] p.327

Proposition 32 Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, et s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $] - R, R[$ où $R = \min(\alpha, \rho)$. [ELAM] p.250

3.2 Développement en série entière de fonctions usuelles [DTZ] p.327 → 331

Proposition 33 Développements en série entière classiques :

- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En particulier, $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

- Pour $\alpha = 1$ et en primitivant, $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

En particulier, $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

3.3 Fonctions classiques définies comme sommes de séries entières [GOUan] p.243

Proposition-Définition 34 La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On définit l'exponentielle complexe par

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \exp(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$$

Définition 35 On définit les applications cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique définies sur \mathbb{C} , notées respectivement ch (ou cosh) et sh (ou sinh), par :

$$\operatorname{ch} z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Définition 36 On définit les applications cosinus et sinus définies sur \mathbb{C} , notées respectivement cos et sin, par :

$$\operatorname{cos} z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sin} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4 Applications

4.1 Analyse complexe : holomorphie et analyticité [HMQUE] p.102 → 104

Définition 37 Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (où Ω est un ouvert de \mathbb{C}) est dite analytique dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque ouvert $\Delta : \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset \Omega$ tel que

$$\forall z \in \Delta, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

où le seconde membre est un série entière en $z - z_0$ convergente dans Δ . [GOUan] p.256

Théorème 38 Soient Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- f est holomorphe sur Ω .
- f est analytique dans Ω . [HMQUE] p.83

Théorème 39 ♠ Principe des zéros isolés ♠
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f .

- (1) Si $a \in Z(f)$, $\exists k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :

$$f(z) = (z - a)^k g(z) \quad \text{avec } g(a) \neq 0$$

- (2) $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω .

Application 40 *Théorème de prolongement des identités* Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω . Alors, $f = g$.
En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω , elles sont égales.

Application 41 (du théorème de prolongement des identités) Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, et en considérant la fonction entière

$$F(z) = e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} dt$$

on a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} dt = \sqrt{2\pi}e^{-\xi/2}$$

Application 42 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $fg = 0$. Alors, $f = 0$ ou $g = 0$. En d'autres termes, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.

4.2 Application à la combinatoire [DTZ] p.336 → 341

Application 43 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement du groupe \mathfrak{S}_n tout élément σ de \mathfrak{S}_n vérifiant

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \sigma(k) \neq k$$

En notant d_n le nombre de dérangements de \mathfrak{S}_n (convention $d_0 = 1$), on a

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

4.3 Equations différentielles et séries entières

Application 44 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Alors f est l'unique solution sur tout intervalle $] -\alpha, \alpha[$ où $\alpha \in]0, +\infty[$ du système différentiel

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p p! x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

[DTZ] p.334 → 336

Application 45 ♠ Résolution de l'équation de Bessel ♠

Il existe une unique solution à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (E)$$

développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. C'est

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

On déduit également

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta$$

[FGNan4] p.101

Questions

Exercice : Produit de Cauchy vs Produit de Hadamard

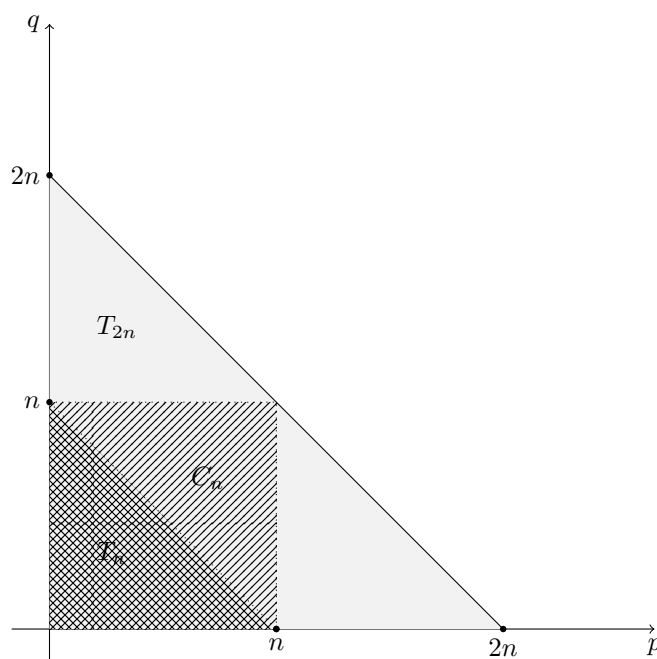
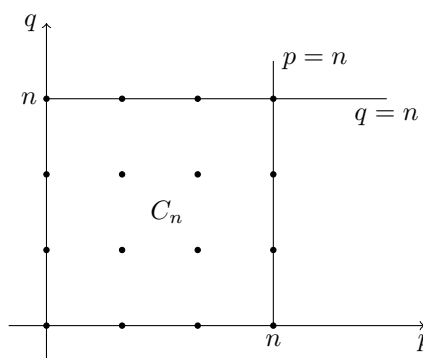
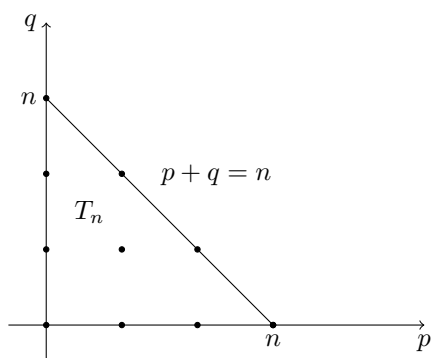
1) Montrer le résultat (plus général) suivant : Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à valeurs dans une algèbre de Banach, absolument convergentes. Alors le produit de Cauchy des deux séries, noté $\sum_{n \geq 0} w_n$, est une série absolument convergente et on a

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \left(\sum_{n \geq 0} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} v_n \right)$$

2) Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à R_a et R_b . Que peut-on dire du rayon de convergence R_H de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n z^n$ (appelée *produit de Hadamard* de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$) ?

Solution : 1) On va introduire deux ensembles qui vont nous être utiles.

$$T_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q \leq n\} \quad \text{et} \quad C_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \leq n, q \leq n\}$$



Ainsi, pour tout entier naturel n , on a

$$T_n \subset C_n \subset T_{2n} \quad (\dagger)$$

Notons les différentes sommes partielles suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S'_n = \sum_{k=0}^n v_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad S''_n = \sum_{k=0}^n w_k$$

On a, d'une part

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S''_n = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k u_p v_{k-p} = \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{(p,q) \in T_n} u_p v_q$$

et, d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n S'_n = \left(\sum_{p=0}^n u_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^n v_q \right) = \sum_{(p,q) \in C_n} u_p v_q$$

Bon maintenant les présentations faites, démontrons le résultat.

Cas particulier : Supposons que les séries sont à termes réels positifs

Grâce à (\dagger) , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{(p,q) \in T_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q) \in C_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q) \in T_{2n}} u_p v_q$$

(i.e.)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S''_n \leq S_n S'_n \leq S''_{2n} \quad (\dagger\dagger)$$

Par hypothèse, la suite $(S_n S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right)$ et la suite $(S''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente. Donc la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est convergente.

Ainsi, en passant à la limite dans la relation $(\dagger\dagger)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

D'où le résultat.

Cas général : Supposons que les séries sont à valeurs dans une algèbre de Banach

D'après la première partie, on peut dire que la série terme général $\sum_{k=0}^p \|u_k\| \cdot \|v_{p-k}\|$ est convergente et on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^p \|u_k\| \cdot \|v_{p-k}\| = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \|u_p\| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \|v_q\| \right)$$

(i.e.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \|u_k\| \cdot \|v_{p-k}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{p=0}^n \|u_p\| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^n \|v_q\| \right) \right)$$

(i.e.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{(p,q) \in T_n} \|u_p\| \cdot \|v_q\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{(p,q) \in C_n} \|u_p\| \cdot \|v_q\|$$

Comme $T_n \subset C_n$, ceci implique donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} \|u_p\| \cdot \|v_q\| = 0$$

On va encore raisonner sur les sommes partielles. Par hypothèse, la suite $(S_n S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n S'_n - S''_n\| &= \left\| \sum_{(p,q) \in C_n} u_p v_q - \sum_{(p,q) \in T_n} u_p v_q \right\| \\ &= \left\| \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} u_p v_q \right\| \\ &\leq \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} \|u_p v_q\| \\ &\leq \sum_{(p,q) \in C_n \setminus T_n} \|u_p\| \cdot \|v_q\| \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n S'_n - S''_n) = 0$$

Ainsi, la suite $(S''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est la même que celle de la suite $(S_n S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. D'où le résultat

2) Pour tout $(r, r') \in [0, R_a[\times [0, R_b[$, les suites $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n r'^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, donc $(a_n b_n (r r')^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, pour tout $r_H \in [0, R_a R_b[$, la suite $(a_n b_n (r_H)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Ce qui implique $R_H \geq R_a R_b$.

Malheureusement, on ne peut rien dire de plus en général comme le montre l'exemple des séries entières $\sum z^{2n}$ et $\sum z^{2n+1}$ de rayon de convergence et leur produit de Hadamard est nul donc son rayon de convergence est infini.

Exercice : Transformation d'Abel

1) Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n$ est convergente. Montrer que la série entière de variable t , $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ et la somme est continue sur ce segment.

2) Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

Montrer que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Solution : 1) Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z_0^k$. Pour tout réel $t \in [0, 1[$, et tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $1 \leq p < q$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q a_k z_0^k t^k &= \sum_{k=p}^q (R_{k-1} - R_k) t^k \\ &= \sum_{k=p}^q R_{k-1} t^k - \sum_{k=p}^q R_k t^k \\ &= \sum_{k=p-1}^{q-1} R_k t^{k+1} - \sum_{k=p}^q R_k t^k \\ &= t^p R_{p-1} - t^q R_q + \sum_{k=p-1}^{q-1} (t^{k+1} - t^k) R_k \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{k \geq 0} a_k z_0^k$ est convergente, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z_0^k$ de cette série tend vers 0. Ainsi, soit $\epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

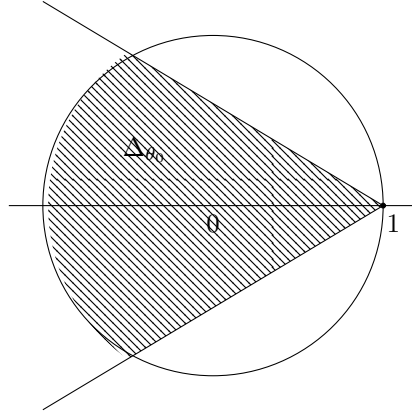
$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq \epsilon$$

Par suite, pour tout entiers $n_0 < p < q$, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=p}^q a_k z_0^k t^k \right| &\leq |t^p R_{p-1}| + |t^q R_q| + \left| \sum_{k=p-1}^{q-1} (t^{k+1} - t^k) R_k \right| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon \left| \sum_{k=p-1}^{q-1} (t^k - t^{k+1}) \right| \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned}$$

La série est uniformément de Cauchy sur le segment $[0, 1]$ donc uniformément convergente sur le même segment. La somme de cette série est continue en tant que somme d'une série uniformément convergente.

2) Avant de commencer, illustrons l'ensemble Δ_{θ_0} . Dans le schéma ci-après, l'écartement angulaire est $2\theta_0$.



Posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'idée est de majorer $|f(z) - S|$ par une quantité qui tend vers 0.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^N a_n z^n \right) - S_N &= \sum_{n=0}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\ &= (z - 1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1) \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$f(z) - S = (z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \quad (\dagger)$$

Fixons maintenant $\epsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \epsilon$ pour tout $n > N$. Dans (\dagger) , pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$|z| < 1$$

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &= |z - 1| \left| \sum_{n=0}^N R_n z^n \right| + \epsilon |z - 1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \\ &= |z - 1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \epsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \quad (\dagger\dagger) \end{aligned}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, tel que $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $|\varphi| \leq \theta_0$. On a $|z|^2 = 1 - 2\rho \cos\varphi + \rho^2$, et lorsque $\rho \leq \cos\theta_0$, on a la majoration

$$\begin{aligned} \frac{|z - 1|}{1 - |z|} &= \frac{|z - 1|}{1 - |z|^2} (1 + |z|) = \frac{\rho}{2\rho \cos\varphi - \rho^2} (1 + |z|) \\ &\leq \frac{2}{2\cos\varphi - \rho} \\ &\leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} \\ &= \frac{2}{\cos\theta_0} \end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^N |R_n| < \epsilon$, on voit donc que si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z - 1| \leq \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$, ($\dagger\dagger$) devient

$$|f(z) - S| \leq \epsilon + \epsilon \frac{2}{\cos\theta_0} = \epsilon \left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0} \right)$$

Exercice : 1) Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et f la somme de cette série entière.

a) Montrer que si la fonction entière f est bornée sur \mathbb{C} , alors f est constante.

b) Plus généralement, montrer que s'il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme. (*Théorème de Liouville*)

2) Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que si f est bornée sur le disque unité, alors f est un polynôme.

Solution : 1)a) Soit M un majorant de $|f|$ sur \mathbb{C} , grâce à la formule de Cauchy, on a

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\pi r^n |a_n| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta}| d\theta \leq 2\pi M$$

Donc si $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc pour $|a_n| \leq M/r^n$ pour tout $r > 0$. En faisant $r \rightarrow +\infty$, on a donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où le résultat.

b) Soit $m = \deg P$. Si $m = 0$, on est dans le cas de la question précédente.

Sinon, on pose

$$g(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n z^{n-m}$$

somme d'une série entière de rayon de convergence infini. La fonction g vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad g(z) = \frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m}$$

et comme $m = \deg P$, ceci montre que g est bornée sur \mathbb{C} tout entier. Donc, par la question précédente, on a donc $a_n = 0$ pour tout $n > m$. D'où le résultat.

2) Par l'égalité de Parseval, on a

$$\forall r \in]0, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Soit M un majorant de $|f|$ sur le disque unité. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\forall r \in]0, 1[, \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \leq \frac{M^2}{2\pi}$$

En faisant tendre r vers 1^- , on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \leq \frac{M^2}{2\pi}$$

La série $\sum |a_n|^2$ est bornée, donc convergente, et ainsi la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Or les a_n sont des entiers, ceci implique que tous les a_n sont nuls à partir d'un certain rang. D'où le résultat.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement du groupe \mathfrak{S}_n tout élément σ de \mathfrak{S}_n vérifiant

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \sigma(k) \neq k$$

En notant d_n le nombre de dérangements de \mathfrak{S}_n (convention $d_0 = 1$).

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$\sum_{k=0}^n C_n^k d_k = n!$$

2) Soit la série entière f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$$

Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

3) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x f(x)$ sur l'intervalle $] -1, 1[$. En déduire que

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4) En déduire que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Solution : 1) Pour $n = 0$, le résultat est évident. Soit n un entier strictement positif. Pour tout entier k compris entre 0 et n , on note I_k le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement k éléments non invariants. Pour construire une telle permutation, il faut choisir k éléments non invariants. Donc C_n^k possibilités. Il faut ensuite construire un dérangement restreint à ces k éléments. Donc d_k possibilités. Ainsi,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, I_k = C_n^k d_k$$

Par suite,

$$|\mathfrak{S}_n| = n! = \sum_{k=0}^n I_k = \sum_{k=0}^n C_n^k d_k$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de dérangements de \mathfrak{S}_n est inférieur au cardinal de \mathfrak{S}_n . Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{d_n}{n!} \leq 1$$

Ainsi, la suite $(\frac{d_n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

3) Les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En notant c_n le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy des deux séries, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k d_k = 1$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad e^x f(x) &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n x^n = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4) En utilisant à nouveau les propriétés du produit de Cauchy, on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$