Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[POM] Cours d'analyse : Agrégation de mathématiques, Alain Pommelet
[FILB] Analyse numérique : Algorithme et étude mathématique, Francis Filbet
[BER] Calcul différentiel topologique élémentaire, Wolfgang Bertram ♠
[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠

Développements

Projection sur un convexe fermé
Théorème des extrema liés
Lemme de Morse

1 Existence et unicité

Définition 1 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Un point x_0 *est un* *minimum* *de* f *sur* $\mathbb{R}^n$ *si pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) \geq f(x_0)$.
Un point x_0 *est un* *minimum local* *de* f *sur* $\mathbb{R}^n$ *s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{x_0}$ *de* x_0 *tel que pour tout* $x \in \mathcal{V}_{x_0}$ $f(x) \geq f(x_0)$.
- Un *maximum* *et un* *maximum local* *se définissent de la même manière en renversant les inégalités.*
- Un *extremum* *est un minimum ou un maximum.*
[ML3an] p.729

1.1 Utilisation de la compacité

Proposition 2 *Soit* $f : (E, d) \to \mathbb{R}$ *une application continue, avec* (E, d) *compact. Alors* f *est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe* $c, d \in E$ *tels que*

$$f(c) = \inf_{x\in E} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{x\in E} f(x)$$

[GOUan] p.31

Application 3 *Equivalence des normes en dimension finie*
Dans un e.v.n. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. **[GOUan] p.50**

Proposition 4 *Soit* A *une partie d'un espace métrique* (E, d). *Alors l'application*

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{d}(x, A) := \inf_{y\in A} \mathrm{d}(x, y) \end{aligned}$$

est 1-lipschitzienne (donc uniformément continue et donc continue) sur E. **[GOUan] p.17-18**

Proposition 5 *Soit* K *une partie compacte non vide d'un espace métrique* (E, d). *Alors il existe* $x \in A$ *tel que, pour tout* $y \in E$,

$$\mathrm{d}(y, A) = \mathrm{d}(y, x)$$

[POM] p.56

Proposition 6 *Soient* K_1 *et* K_2 *deux compacts d'un espace métrique* (E, d). *Alors il existe* $x_1 \in K_1$ *et* $x_2 \in K_2$ *tels que*

$$\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(K_1, K_2) := \inf_{\substack{x\in K_1 \\ y\in K_2}} \mathrm{d}(x, y)$$

[GOUan] p.33

Proposition 7 *Soient* (E, d) *un espace métrique,* K *un compact de* E *et* F *un fermé de* E *tels que* $K \cap F \neq \varnothing$. *Alors* $\mathrm{d}(K, F) \neq 0$.

Remarque 8 *Ce résultat est faux si l'on suppose seulement* K *fermé ... En effet, en prenant*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\}$$

K *et* F *sont fermés, disjoints et pourtant* $\mathrm{d}(K, F) = 0$.

Proposition 9 *Soient (E, d) un espace métrique compact et une application continue $f : E \to E$ telle que*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y, \quad \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x,y)$$

Alors f admet un unique point fixe. **[GOUan] p.34**

1.2 Utilisation de la coercivité

Définition 10 *Soient E un e.v.n. de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. On dit que f est coercive si*

$$\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Proposition 11 *Soient F un fermé (non borné) d'un e.v.n. E de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue et coercive. Alors il existe $x \in F$ tel que*

$$f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$$

[GOUan] p.33

Proposition 12 *Soient E un e.v.n. E de dimension finie, K un compact de E et F un fermé de E. Alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que*

$$\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(K,F)$$

[GOUan] p.33

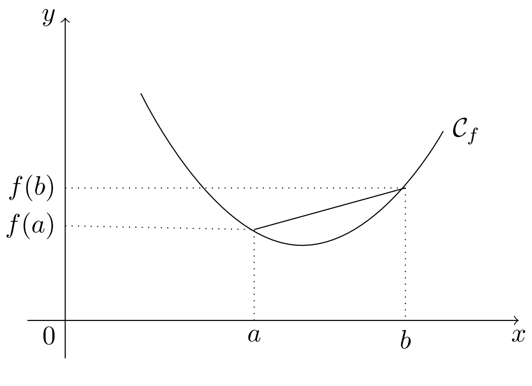
1.3 Utilisation de la convexité

Définition 13 *Soit C une partie convexe d'un espace normé E. Une application $f : C \to \mathbb{R}$ est dite convexe si*
$\forall a, b \in I,\ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$$

Elle est dite concave -f est convexe.
Lorsque l'inégalité est stricte pour $\lambda \in]0,1[$, on dit que f est strictement convexe. **[GOUan] p.94**

Remarque 14 *Lorsque $C = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'inégalité de convexité dans la définition se traduit graphiquement par le fait que tous les points du segment $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ sont au dessus du graphe de f.*



[GOUan] p.94

Proposition 15 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Alors f est constante.* **[GOUan] p.98**

Proposition 16 *Soit C une partie convexe d'un espace normé E et $f : C \to \mathbb{R}$ une application convexe, alors il existe au plus un minimum f sur C.*

1.4 En mélangeant tout ça ...

Proposition 17 *Compacité $\oplus$ Convexité*
Soient K un compact convexe d'un e.v.n. et une application continue $f : K \to K$ telle que

$$\forall (x,y) \in K^2, \quad ||(f(x) - f(y))|| \leq ||x - y||$$

Alors f admet un unique point fixe. **[GOUan] p.52**

Théorème 18 *Convexité $\oplus$ Coercivité*
Soient E un espace de Hilbert et $f : E \to \mathbb{R}$ une application telle que :
(i) f soit continue,
(ii) f est coercive
(iii) f soit strictement convexe,
Alors il existe un unique maximun global. **[FILB] p.139**

Application 19 *Les fonctionnelles quadratiques*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}{}^t x A x - {}^t b x \end{aligned}$$

Alors il existe un unique $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\overline{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ qui est aussi la solution du système $Ax = b$. **[FILB] p.139-140**

2 Extremum dans les espaces de Hilbert [BRZ] p.79-80

Théorème 20 ♠ *Projection sur un convexe fermé*
♠ *Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.*
Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||x - u|| = \min_{y \in K} ||x - y|| \qquad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

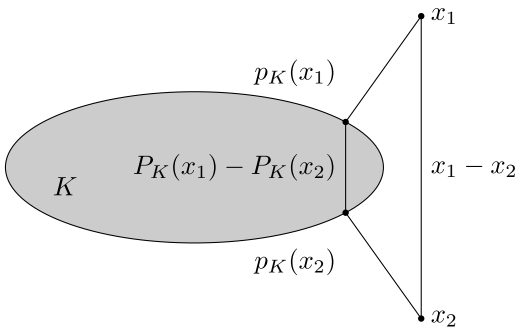
$$u \in K \ \text{ et } \ \langle x - u, y - u \rangle \leq 0 \ \forall y \in K \qquad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Corollaire 21 *En notant, $P_K(x_1)$ la projection de x_1 sur K et de même pour x_2, on a :*

$$\forall x_1, x_2 \in K, \quad ||P_K(x_1) - P_K(x_2)|| \leq ||x_1 - x_2||$$

Remarque 22 *Sur un dessin, le résultat est évident.*



Théorème 23 *Projection sur un sous-espace fermé Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $y \in p_K(x)$
2) $y \in K$ et $(x - y) \in K^\perp$

3 Utilisation de la différentiabilité

3.1 Conditions du premier et du second ordre [ML3an] p.729 → p.734

Définition 24 *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Un point x_0 de $\mathcal{U}$ est un point critique de f si f est différentiable et si $Df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.*

Théorème 25 • *Condition du premier ordre :*
Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application différentiable en x_0. Si x_0 est un extremum local de f sur $\mathcal{U}$, alors

$$Df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})},$$

autrement dit, x_0 est un point critique de f.
• *Condition du second ordre :*
Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en x_0. Alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local de f sur $\mathcal{U}$ si et seulement si la hessienne $Hf(x_0)$ est définie positive (resp. définie négative).

Remarque 26 *La réciproque du premier point est fausse et du second point également si on enlève le caractère "définie" de la hessienne ! Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f'(0) = f''(0) = 0$ donc 0 est un point critique et la hessienne en 0 est positive (car elle est nulle). Or 0 n'est pas un extremum local de f.*

Proposition 27 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert* **convexe** *de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application différentiable et convexe. Si x_0 est un point critique de f, alors x_0 est un minimum pour f sur $\mathcal{U}$.*

Définition 28 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un point x_0 est un point selle de f sur $\mathbb{R}^n$ si x_0 est un point critique de f tel que pour tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a, il existe $(y, z) \in \mathcal{V}_a^2$*

$$f(y) < f(x_0) < f(z).$$

Application 29 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.*
Points critiques : $(0, 0), (0, \sqrt{2})$ *et* $(0, -\sqrt{2})$
Nature des points critiques :

$$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Hf_{(0,\sqrt{2})} = Hf_{(0,-\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$(0, 0)$ n'est pas un extremum. C'est en fait un point selle car ($h(0, 1) = -3/4 < 0$ et $h(1, 0) = 1 > 0$).
Comme $Hf_{(0,\sqrt{2})}$ et $Hf_{(0,-\sqrt{2})}$ sont définies positives, $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$ sont des minimums locaux de f.
De plus, comme $f(x, y) - f(0, \sqrt{2}) = f(x, y) - f(0, -\sqrt{2}) = x^2 + (\frac{y^4}{4} - 1)^2 \geq 0$. Ces minimums sont même globaux.

Application 30 ♠ *Lemme de Morse* ♠
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n - p)$.
Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u := \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$$

3.2 Conditions sous contraintes [BER] p.191 → 195

Théorème 31 ♠ *Théorème des extrema liés* ♠
Soit $S = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$, où $g : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1. On suppose que, pour tout $x \in W$, $Dg(x)$ est surjective. Soit aussi $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
Si p est un point critique de $f|_S$, alors il existe une forme linéaire $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ telle que

$$Df(p) = \lambda \circ Dg(p)$$

Autrement dit, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons $Df(p)(v) = \lambda(Dg(p)(v))$, ou encore, en écrivant $\lambda(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$: il existe $\lambda_1, ...\lambda_m \in \mathbb{R}$ (dits des multiplicateurs de Lagrange) tels que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(p)(v) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Dg_i(p)(v)$$

Application 32 *Grâce au théorème des extrema liés, on peut démontrer de façon amusante le théorème spectral :*
Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Application 33 *Inégalité arithmético-géométrique*
Soient $x_1, ..., x_n$ des nombres réels positifs. On a

$$(x_1...x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

[GOUan] p.319-320
Mise en boîte à peu de frais
Pour un volume donné, le parallélépipède rectangle d'aire minimum est le cube. **[ROU] p.406 → 408**

Application 34 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $||M||_2 = \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2\right)^{1/2}$, où $m_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice M. Alors le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ de norme minimale.* **[GOUan] p.321**

4 Utilisation de l'holomorphie : Principe du maximum [ML3an] p.442-443

Proposition 35 *Propriété de la moyenne*
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$. Pour tout disque fermé $\overline{D}(a,r) \subset \mathcal{U}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Théorème 36 *Principe du maximal local*
Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum local en a, alors f est constante sur un voisinage de a.

Corollaire 37 *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ connexe et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum en a, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Théorème 38 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\overline{\mathcal{U}}$ et holomorphe sur $\mathcal{U}$. On pose $M = \sup_{\partial \mathcal{U}} |f(z)|$. Alors*

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad |f(z)| \leq M$$

De plus, s'il existe un point de $\mathcal{U}$ en lequel le maximum est atteint, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

5 Optimisation numérique

5.1 Méthode de Newton [ROU] p.152 → 156

Théorème 39 ♠ *Méthode de Newton* ♠
• *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c,d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.*
Alors pour $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a.
• *De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a,d]$, la méthode converge et on a :*

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2 \text{ si } n \to +\infty$$

[ROU] p.152

5.2 Méthode de gradient [DIM] p.208 → 212

Théorème 40 *Soient A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors les problèmes*

$$\textit{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } Ax = b$$

et

$$\textit{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$$
$$\textit{avec } f(y) = \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

sont équivalents.

Définition 41 *Pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif*

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \ r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k \rangle} \end{cases}$$

est appelé méthode du gradient à pas optimal.

Théorème 42 ♠ *La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour tout matrice symétrique définie positive.*

Lemme 43 ♠ *Inégalité de Kantorovitch* ♠
Soient A une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n} ||x||^4$$

Illustrations

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :