Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$

Mohamed NASSIRI

Référence :

Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré - p.82-83
Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco - p.279

Recasage :

●●●●● 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
●●●●● 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
●●●●● 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
●●●●● 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Résumé :

La fonction Γ d'Euler est *a priori* définie sur le demi-plan $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Ce développement nous permet de "gratter un peu de terrain" sur le domaine de définition en utilisant plusieurs techniques d'analyse : théorème de méromorphie, principe du prologement analytique, théorème de Fubini ...

Prérequis :

Séries entières - Analycité - Fonctions holomorphes et méromorphes

---

Théorème : La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs.

Démonstration.
Etape 1 : On découpe ... :

$\forall z \in \mathcal{H}$, on a

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Manifestement, il s'agit d'exprimer la première intégrale sous forme d'une série. En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on a

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

Par suite, on a $\forall z \in \mathcal{H}$,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right) \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Etape 2 : On remue ... :

On aimerait intervertir la somme et l'intégrale grâce au théorème de Fubini mais pour cela, il faut s'assurer que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| \mathrm{d}t < +\infty$$

En remarquant que pour $t > 0$, $|t^z| = t^{\Re(z)}$, on a donc, pour $t \in]0,1]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| |t^{n+z-1}| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t t^{\Re(z)-1}$$

Or, comme $\Re(z) > 0$, la fonction $t \mapsto e^t t^{\Re(z)-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. Ainsi, par le théorème de Fubini, on a

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 t^{n+z-1} \mathrm{d}t}_{=\frac{1}{z+n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Etape 3 : On apprête ... :

> **Rappel :** Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$ telle que :
> (i) pour tout compact K de $\mathcal{U}$, il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K,
> (ii) la série $\sum_{n\geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.
> Alors la somme de la série $\sum f_n$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$.

Posons

$$f \ : \ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \ : \ z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle simple $-n$. (i) est vérifié.
- Soit K un compact de $\mathbb{C}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N)}$. Pour $n > N$, f_n n'a pas de pôles dans K.

De plus, pour tout $z \in K$, on a

$$|z+n| \geq n - |z| \geq n - N$$

Par conséquent, pour tout $z \in K$,

$$|f_n(z)| \leq \frac{(-1)^n}{n!(n-N)}$$

et donc la série $\sum_{n\geq N} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur K.
On conclut donc que la fonction f est méromorphe dont les pôles (simples) sont les entiers négatifs.

Etape 4 : On assaisonne ... :

Soyons professionels et n'oublions pas notre dernier morceau : $\int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$. On va montrer par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral que la fonction $z \mapsto \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

tout entier.
Posons la fonction

$$\begin{aligned} h \ : \ ]1,+\infty] \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (t,z) &\mapsto t^{z-1}e^{-t} \end{aligned}$$

- $\forall z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto h(t,z)$ est dans $L^1(]1,+\infty])$,
- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto h(t,z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$,
- Soit un compact $K \subset \mathbb{C}$ et $z \in K$, on a

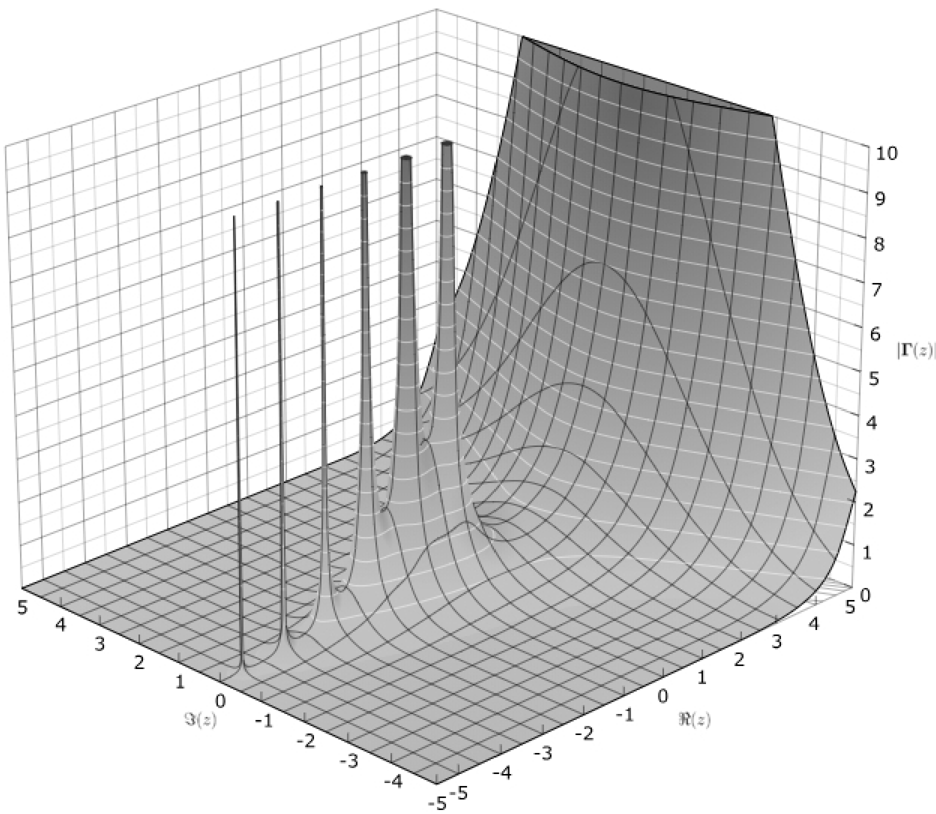
$$|h(t,z)| = t^{\Re(z)-1}e^{-t}$$

Or comme $z \in K$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\Re(z) \leq \alpha$. Ainsi, pour tout $z \in]1,+\infty] \times K$,

$$|h(t,z)| \leq \underbrace{t^{\alpha-1}e^{-t}}_{:=g_K(t)}$$

avec $g_K \in L^1(]1,+\infty])$. Ainsi par le théorème d'holomorphie sous signe intégral, F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

<u>*Conclusion :*</u> La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. $\square$



Module de la fonction gamma sur le plan complexe

La science a eu de merveilleuses applications, mais la science qui n'aurait en vue que les applications ne serait plus de la science, elle ne serait plus que de la cuisine.

Henri Poincaré

Remarques :

- On a utilisé le théorème suivant :

Théorème : Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$ telle que :
(i) pour tout compact K de $\mathcal{U}$, il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K,
(ii) la série $\sum_{n\geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.
Alors la somme de la série $\sum f_n$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$.

Démonstration : En fait, ce théorème se déduit directement de la définition de convergence uniforme d'une série méromorphe :

Définition : Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$. On dit que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{U}$ si, pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$:
(i) il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K,
(ii) la série $\sum_{n\geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$ vérifiant les conditions (i) et (ii). Pour tout $z \in K$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N_K} f_n(z) + \sum_{n=N_K+1}^{+\infty} f_n(z)$$

Dans cette expression, la première somme est finie et définit une fonction méromorphe sur K. La seconde somme est holomorphe sur K comme série de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur K.

$\square$

- Ce développement nous montre que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Nous allons voir que la fonction $1/\Gamma$ est entière, en démontrant au passage la formule de Weierstrass :

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right]$$

où γ est la constante d'Euler.

Démonstration : $\forall z \in \mathcal{H}$, on pose

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-z\ln(\mathrm{t})} e^{-t} \mathrm{d}t$$

$\square$