Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Prenons notre bon vieux produit scalaire et sa norme associée sur $\mathbb{R}^3$ pour visualiser. On a, pour $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\varphi(x, y) := \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \text{ et } q(x) = ||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

On sait ce que veut dire "orthogonal selon $\langle , \rangle$" notamment et surtout, on a la propriété remarquable suivante : si $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$. On parle de caractère "défini" pour q. On aimerait faire une généralisation. Par exemple, dans le cadre de la théorie de la Relativité restreinte (on a une dimension en plus : le temps) on parle d'espace-temps donc on peut l'identifier à $\mathbb{R}^4$. Dans cet espace, on définit la forme bilinéaire symétrique, et donc la forme quadratique, suivantes :

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 \text{ et } q(x) = ||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

Petit (ou gros ?) problème, on a perdu le caractère défini de q : en effet, il existe bien des vecteurs non nuls tels que leur "norme" soit nulle (exemple : $(0, 0, 1, 1)$). Du coup, "normaliser" un vecteur ne sera pas aussi facile (on risque de diviser par 0 ...). Autre problème : l'orthogonalité. On peut oublier la notion intuitive que l'on a de l'orthogonalité (géométrique, euclidienne) ! Par exemple, notre vecteur de tout à l'heure $(0, 0, 1, 1)$ est orthogonal à lui-même ... Ce qui n'est pas le cas dans le cadre "que l'on connait" ... Tout ça, nous pousse donc à définir une nouvelle notion de l'orthogonal et de l'isotropie.

On a un résultat remarquable : le lemme de Morse. Il nous dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (une fonction de classe C^3 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine) est une application quadratique, à un difféomorphisme local près, dès que sa hessienne en 0 est non dégénérée.

Une des applications intéressantes des formes quadratiques réelles sont les coniques et les quadriques. Leur classification est entièrement déterminée par la signature d'une certaine forme quadratique intervenant dans l'équation de la conique et de la quadrique.

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[GOUag] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠

Développements

Lemme de Morse
Critère de Sylvester

1 Formes quadratiques réelles

1.1 Formes bilinéaires symétriques [GOUag] p.227-228

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et une application*

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

On dit que φ est une forme bilinéaire si :
(i) pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x, .) : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, et
(ii) pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(., y) : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Exemple 2 *L'application $\varphi : C^0([0, 1], \mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})^2$.*

Proposition 3 *Soit $B = (e_1, ...e_n)$ une base de E. Alors la matrice $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelé matrice de φ dans la base B.*
L'application qui à φ associe sa matrice M dans une base fixée de E est un isomorphisme.

Proposition 4 *Soient B et B' deux bases de E, et P la matrice de passage de B à B'. Si φ est une forme bilinéaire sur E, et si M désigne sa matrice* *dans la B, M' dans la base B', alors*

$$M' = ^t PMP$$

Définition 5 *Le rang de φ est le rang de M.*

Définition 6 *Soit φ une forme bilinéaire sur E. On dit que φ est symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$*

Proposition 7 *Soit B une base de E. Une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si, et seulement si sa matrice dans la base B est symétrique.*

1.2 Formes quadratiques [GOUag] p.229-230

Définition 8 *On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme*

$$q : E \to \mathbb{K},\ x \mapsto \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Proposition 9 *Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de q et on a*

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in E^2,\quad \varphi(x, y) &= \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] \\ &= \frac{1}{4}[q(x + y) - q(x - y)]\end{aligned}$$

Exemple 10 *L'application*

$$q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$$

est une forme quadratique de forme polaire

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$$

Définition 11 *Soient q une forme quadratique sur E et B une base de E.*
On appelle matrice de q dans la base B la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B, et le rang de q le rang de cette matrice.

Exemple 12 *On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on y définit la forme quadratique q par*

$$u = (x, y, z) \mapsto q(u) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$$

Alors la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Orthogonalité et isotropie

2.1 Définitions et premières propriétés [GOUag] p.230-231

Définition 13 *On appelle cône isotrope de q l'ensemble*

$$C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

On dit que q est définie si $C_q = \{0\}$.
Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $x \in C_q$.

Exemple 14 *Soit $\mathbb{R}^3$ et $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. On a donc*

$$C_q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Voir Figure 0.

Définition 15 *On dit que q est définie positive si*

$$q(x) \geq 0,\ \forall x \in E \quad \text{et} \quad q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

. [**GRI**] **p.302**

Définition 16 *On dit que x et y de E sont orthogonaux selon q si $\varphi(x, y) = 0$.*
Soit $A \subset E$, on appelle orthogonal de A selon q l'ensemble

$$A^{\perp} = \{y \in E \mid , \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

Deux ensembles A et B de E sont dits orthogonaux selon q si $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$, $\varphi(x, y) = 0$. On note $A \perp B$.

Proposition 17 • *Si $A \subset B \subset E$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$*
• *Si $A \subset E$, alors $A^{\perp} = (vectA)^{\perp}$*
• *Si $A \subset E$, alors $A \subset A^{\perp\perp}$*

Définition 18 *On appelle noyau de q le s.e.v de E noté* Ker$q$ *défini par*

$$\mathrm{Ker} q = E^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

q est dite non dégénérée si $\mathrm{Ker} q = \{0\}$, *dégénérée si* $\mathrm{Ker} q \neq \{0\}$.

Proposition 19 *On a* $\mathrm{Ker} q \subset C_q$. *En particulier, si q est définie, alors q est non dégénérée.*

Remarque 20 *La réciproque est fausse. Exemple : $q(x, y) = x^2 - y^2$ est non dégénérée mais n'est pas définie car pour tout x, $q(x, x) = q(x, -x) = 0$.*

Proposition 21 *Soit B une base de E. En identifiant les vecteurs de E et leur représentation en vecteurs colonne dans le base B, on a* $\mathrm{Ker} q = \mathrm{Ker} A$, *où A est la matrice de q dans la base B.*

2.2 Bases q-orthogonales

Définition 22 *Une base B de E et dite q-orthogonale si pour tout couple d'éléments distincts (e,e') de B, on a* $\varphi(e,e')=0$.

Remarque 23 *Si $B=(e_1,...e_n)$ est une base q-orthogonale de E, alors* $\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n x_i^2q(e_i)$$

Alors la matrice de q dans la base B est diagonale.

Théorème 24 *Si E est de dimension finie, il existe une base q-orthogonale de E.*

Corollaire 25 *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} soit diagonale.*

2.3 Méthode de Gauss

Remarque 26 *Si $B=(e_1,...e_n)$ est une base q-orthogonale de E, et $B^*=(e_1^*,...e_n^*)$ sa base duale. En posant $\lambda_i=q(e_i)$, on a, $\forall x\in E$,*

$$q(x)=q\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(e_i^*(x))^2$$

Donc q s'écrit comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Le calcul de ces formes linéaires est donnée par la méthode suivante. [**GOUag**] **p.232**

Méthode 27 *Méthode de Gauss :*

Exemple 28 *Soit $E=\mathbb{R}^3$. On considère*

$$q(x,y,z)=x^2+2y^2+5z^2+2xy-4yz$$

La méthode de Gauss donne

$$q(x,y,z)=(x+y)^2+(y-2z)^2+z^2$$

[**GRI**] **p.224 – 225**

2.4 Propriétés des orthogonaux selon q

Proposition 29 *Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et F un s.e.v de E vérifie*
(i) $\dim F+\dim F^\perp=\dim E+\dim(F\cap\mathrm{Ker}q)$
(ii) $F^{\perp\perp}=F+\mathrm{Ker}q$

Proposition 30 *Soit F un s.e.v de dimension finie de E (mais E de dimension quelconque). Alors*
(i) Si la restriction $q_{|F}$ de q à F est définie, on a $F\oplus F^\perp=E$
(ii) Si q est définie, on a $F=F^{\perp\perp}$

3 Réduction

3.1 Réduction simultanée [GRI] p.313-314

Définition 31 *On appelle espace euclidien, un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle,\rangle$ ((i.e.) une forme bilinéaire symétrique définie positive)* **[GRI] p.221**

Théorème 32 *Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E. Il existe alors des bases orthogonales à la fois pour $\langle,\rangle$ et pour q.*

Corollaire 33 *Soit q une forme quadratique sur E et $S=\mathrm{Mat}_B(q)$ où B est une base quelconque. Alors :*
1) On peut construire une base orthogonale de q formée de vecteurs propres de S.
2) De plus, $\mathrm{sgn}(q)=(n_+,n_-)$, *où*
n_+ = nombre de valeurs propres strictement positives de S,
n_- = nombre de valeurs propres strictement négatives de S.

Exemple 34 *Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique $\langle,\rangle$. On considère*

$$q(x,y,z)=-2x^2-2y^2-2z^2+6xy+6yz+6xz$$

Les vecteurs

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

forment une base orthogonale à la fois pour $\langle,\rangle$ et pour q.

3.2 Théorème de Sylvester [GRI] p.309-310

Théorème 35 *Théorème de Sylvester Si E est un $\mathbb{R}$-e.v., et q une forme quadratique sur E, alors il existe une base (e_i) telle que, si $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$,*

$$q(x)=x_1^2+...+x_p^2-x_{p+1}^2-...-x_r^2$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}(q)_{e_i}=\left(\begin{array}{c|c|c}I_p&0&0\\\hline 0&I_{r-p}&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right)$$

où $r=\mathrm{rg}q$, et p est entier (qui ne dépend que de q). Le couple $(p,r-p)$, noté $\mathrm{sgn}(q)$, est dit signature de q.

Exemple 36 *La forme quadratique $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par :*

$$q(x)=x_1^2+2x_2^2+15x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3$$

a pour signature $\mathrm{sgn}(q)=(2,1)$.

Proposition 37 *Si E est un $\mathbb{R}$-e.v., et q une forme quadratique sur E. Alors :*

$$q \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(q) = (n, 0)$$

$$q \text{ est non dégénérée} \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(q) = (p, n-p)$$

4 Applications

4.1 Conséquences sur les matrices définies positives

Définition 38 • *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est définie positive si pour tout $X \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.*
• $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M$ *et* $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXMX > 0\}$
• $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M$ *et* $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXMX \geq 0\}$

Proposition 39 <u>*Orthogonalisation simultanée*</u>
Soient M, N deux matrices symétriques, telles que M soit définie positive. Alors il existe une matrice C inversible telle que

$${}^tCMC = I \quad \text{et} \quad {}^tCNC = D$$

où D est une matrice diagonale réelle. [**GOUag**] **p.245**

Théorème 40 <u>*Critère de Sylvester :*</u>
Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. $\forall k \in \{1, ..., n\}$, on définit la matrice extraite $M_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in M_k(\mathbb{R})$. Alors M est définie positive si et seulement si $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $\det M_k > 0$. [**GOUag**] **p.248**

Application 41 *La matrice $A = (\frac{1}{1+|i-j|})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique définie positive.* [**GOUag**] **p.248**

Application 42 • *$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un cône ouvert dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$*
• $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$

4.2 Calcul différentielle : différentielle seconde [ML3an] p.700 → 702

Théorème 43 <u>*Théorème de Schwarz*</u>
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, une application deux fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Définition 44 *Avec les mêmes notation, la <u>matrice hessienne de f en a</u> est donnée par :*

$$Hf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque 45 *Hf_a est symétrique d'après le théorème de Schwarz.*

Théorème 46 ♠ <u>*Lemme de Morse*</u> ♠
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u := \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que

$$\varphi(0) = 0 \ \text{ et } \ f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$$

[**ROU**] **p.354**, **p.210**

4.3 Coniques et quadriques [GRI] p.413 → 420

Définition 47 *On appelle <u>conique</u> l'ensemble C des points $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation*

$$\underbrace{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}_{:=q(x,y)} + \underbrace{2Dx + 2Ey + F}_{:=\varphi(x,y)} = 0$$

Théorème 48 <u>*Classification des coniques*</u>
Soit C une conique définie par l'équation $q(x,y) + \varphi(x,y) = 0$. On suppose que $C \neq \varnothing$ et que C n'est pas réduit à un point. Alors :
1. Si $\operatorname{sgn}(q) = (2,0)$, alors C est une ellipse.
2. Si $\operatorname{sgn}(q) = (1,1)$, alors C est une hyperbole qui éventuellement dégénère en deux droites non parallèles.
3. Si $\operatorname{sgn}(q) = (1,0)$, alors C est une parabole qui éventuellement dégénère en une droite, ou deux droites parallèles, si la direction principale isotrope est contenue dans $\operatorname{Ker}\varphi$.

Définition 49 *On appelle <u>quadrique</u> l'ensemble des points $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient l'équation*

$$\underbrace{Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz}_{:=q(x,y,z)}$$
$$+ \underbrace{2Cx + 2C'y + 2C''z + D}_{:=\varphi(x,y,z)} = 0$$

Théorème 50 <u>*Classification des quadriques*</u>
Soit Q une quadrique définie par l'équation $q(x,y,z) + \varphi(x,y,z) = 0$. On suppose que $Q \neq \varnothing$ et que Q n'est pas réduit à un point. Alors :
1. $\operatorname{rg}(q) = 3$:
  (a) Si $\operatorname{sgn}(q) = (3,0)$, alors Q est un ellipsoïde.
  (b) Si $\operatorname{sgn}(q) = (2,1)$, alors Q est
    - un hyperboloïde à une nappe
    - un cône
    - un hyperboloïde à deux nappes
2. $\operatorname{rg}(q) = 2$:

(a) Si $\mathrm{sgn}(q) = (2,0)$*, alors* Q *est une paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique si la direction principale isotrope est contenue dans* $\mathrm{Ker}\varphi$*.*

(b) Si $\mathrm{sgn}(q) = (1,1)$*, alors* Q *est une paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique si la direction principale isotrope est contenue dans* $\mathrm{Ker}\varphi$*.*

3. $\mathrm{rg}(q) = 1$ *:*

Q *est une cylindre parabolique qui éventuellement dégénère en deux plans parallèles, si les deux directions principales isotropes est contenue dans* $\mathrm{Ker}\varphi$*.*

Illustrations

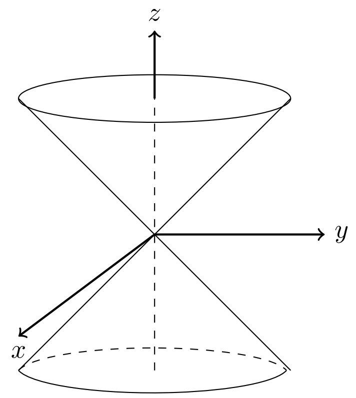
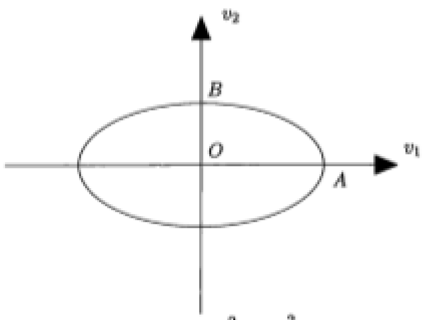
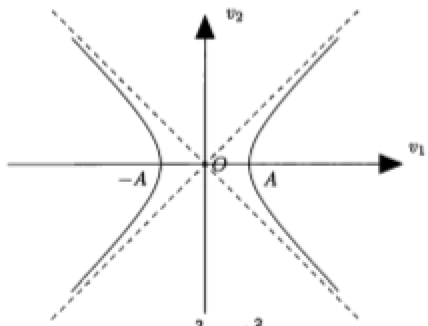


Figure 0 : $C_q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$



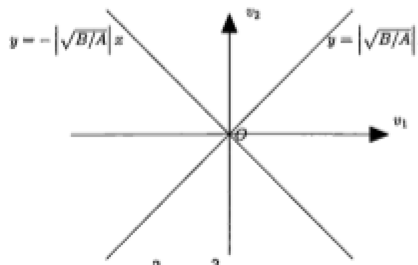
Ellipse : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 1



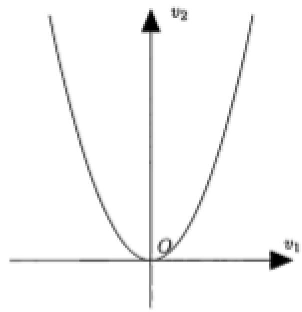
Hyperbole : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 2



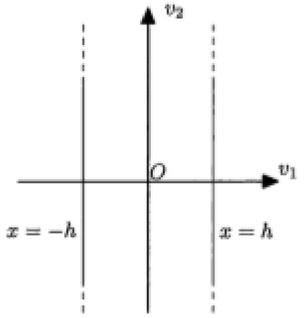
$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$

Figure 3

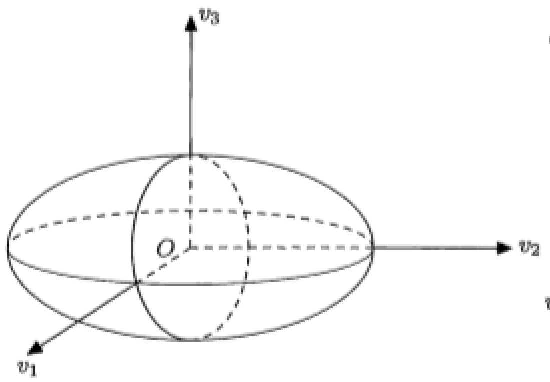


Parabole : $y = ax^2$

Figure 4

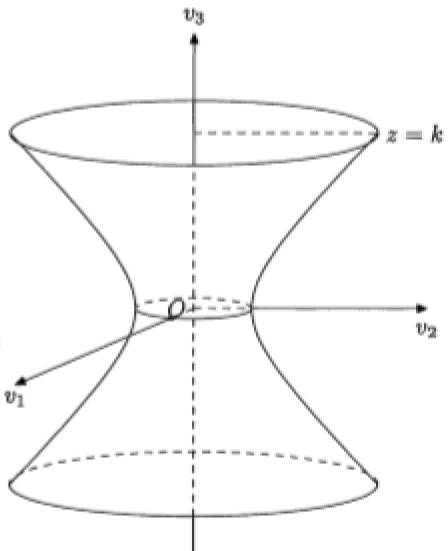


Illustrations de la classification des coniques, Joseph Grifone



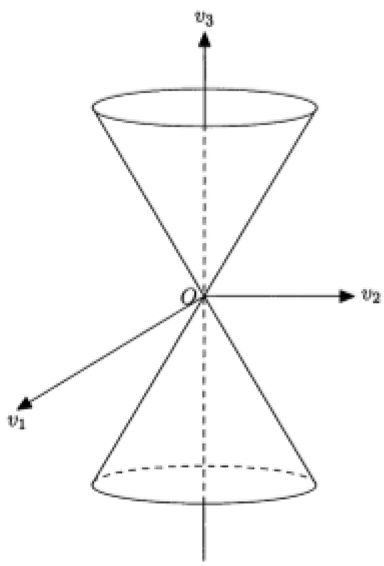
Elllipsoïde : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$

Figure 6



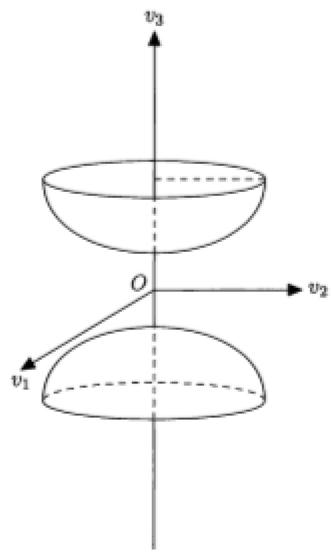
Hyperboloïde à une nappe : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$

Figure 7



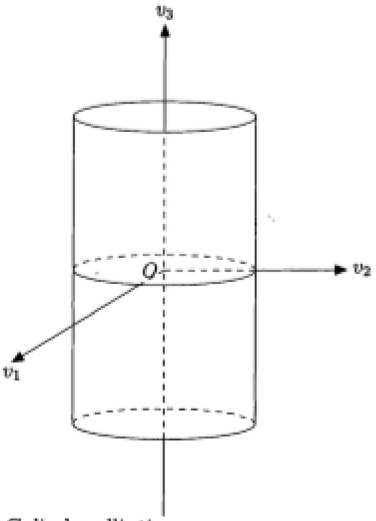
Cône : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$

Figure 8



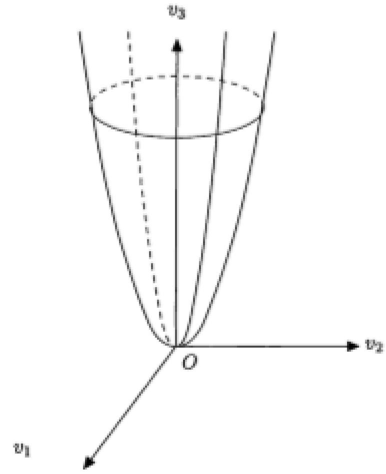
Hyperboloïde à deux nappes :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$

Figure 9



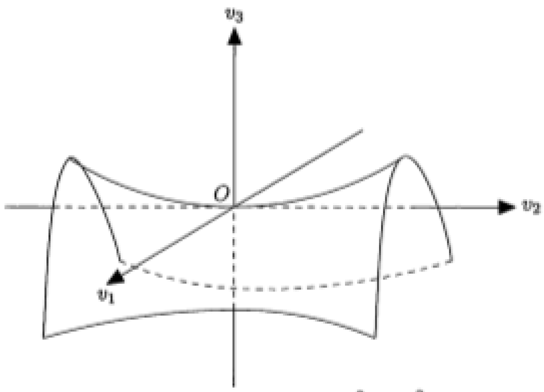
Cylindre elliptique :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Figure 10



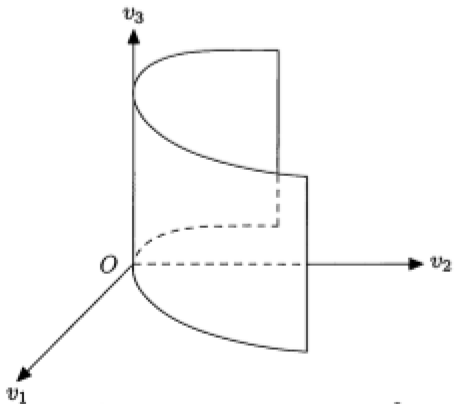
Paraboloïde elliptique :
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z$

Figure 11



Paraboloïde hyperbolique : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$

Figure 12



Cylindre parabolique : $y = ax^2$

Figure 13

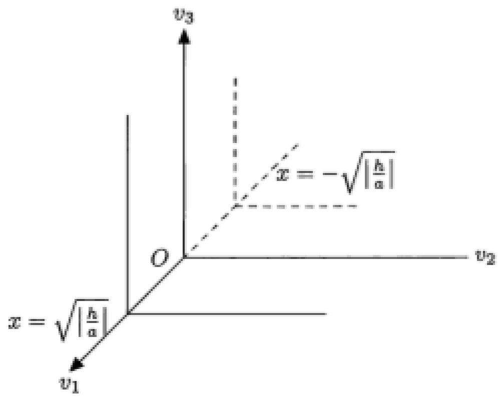


Figure 14

Illustrations de la classification des quadriques, Joseph Grifone

Questions

Exercice : 1) Donner la signature de la forme quadratique

$$q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$$

2) Donner la signature de la forme quadratique

$$q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto (\mathrm{Tr}(M))^2$$

Solution : 1) Il faut penser ici à décomposer l'espace des matrices comme suit

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A$. Ainsi,

$$\begin{aligned} q(M) = \mathrm{Tr}(M^2) = \mathrm{Tr}((S+A)^2) &= \mathrm{Tr}(S^2) + \mathrm{Tr}(SA) + \mathrm{Tr}(AS) + \mathrm{Tr}(A^2) \\ &= \mathrm{Tr}(S^2) + 2\mathrm{Tr}(SA) + \mathrm{Tr}(A^2) \end{aligned}$$

Or, comme l'application Tr est stable par transposée ($i.e$) pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(^tM) = \mathrm{Tr}(M)$, on a, pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(SA) = \mathrm{Tr}(^t(SA)) = \mathrm{Tr}(^tA^tS) = \mathrm{Tr}(-AS) = -\mathrm{Tr}(SA) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}(SA) = 0$$

On en déduit donc que

$$q(M) = \mathrm{Tr}(S^2) + \mathrm{Tr}(A^2)$$

Or, d'une part,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(S^2) = \sum_{i=1}^n (SS)_{ii} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}s_{ji} \quad \text{ or } s_{ij} = s_{ji} \text{ car } S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n (AA)_{ii} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} \quad \text{ or } a_{ij} = -a_{ji} \text{ car } A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $q|_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$ est positive et $q|_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$ est négative, on a donc

$$\mathrm{sgn}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

2) L'application

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$$

est une forme linéaire et donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = 1$. Comme $(\mathrm{Tr}(M))^2 \geq 0$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc $\mathrm{sgn}(q) = (1, 0)$.

Exercice : Montrer les propriétés suivantes :
1) Si $A \subset B \subset E$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
2) Si $A \subset E$, alors $A \subset A^{\perp\perp}$
3) Si $A \subset E$, alors $A^\perp = (\mathrm{vect} A)^\perp$

Solution : 1) Soit $x \in B^\perp$, il est donc orthogonal à tous les vecteurs de B, et en particulier orthogonal à tous les vecteurs de A (puisque $A \subset B$) et donc $x \in A^\perp$.

2) Si $x \in A$, alors $\varphi(x, y) = 0 \ \forall y \in A^\perp$ $(i.e)$ $\varphi(y, x) = 0 \ \forall y \in A^\perp$, donc $x \in A^{\perp\perp}$.

3) Comme $A \subset \mathrm{vect}A$, on a $(\mathrm{vect}A)^\perp \subset A^\perp$.
Pour l'inclusion inverse, remarquons que tout élément de $A^\perp$ est orthogonal à tout élément de A donc aussi à toute combinaison linéaire d'éléments de A, donc appartient à l'orthogonal de $\mathrm{vect}A$. Ainsi, $A^\perp \subset (\mathrm{vect}A)^\perp$.
On a ainsi démontré que $A^\perp = (\mathrm{vect}A)^\perp$

Exercice : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et F un s.e.v de E. Montrer que

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \mathrm{Ker} q)$$

Solution : Soient φ la forme polaire associée à q et Θ_φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \Theta_\varphi \ : \ & E \to E^* \\ & x \mapsto \varphi_x \end{aligned}$$

où $\varphi_x \ : \ E \to \mathbb{R}, \ y \mapsto \varphi_x(y) = \varphi(x, y)$
Soient $H = \Theta_\varphi(F)$ le sous-espace vectoriel de E^* image de F, et H^0 son orthogonal au sens de la dualité $(i.e.)$

$$\begin{aligned} H^0 &= \{y \in E \mid \forall x \in H, \ \Theta_\varphi(x)(y) = 0\} \\ &= \{y \in E \mid \forall x \in H, \ \varphi(x, y) = 0\} \end{aligned}$$

On obtient donc que $H^0 = F^\perp$ et comme $\dim H + \dim H^0 = \dim E^* = \dim E$, on a donc

$$\dim H + \dim F^\perp = \dim E$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\dim H = \dim F - \dim(F \cap \mathrm{Ker} q)$

On considère θ_φ la restriction de Θ_φ à F :

$$\begin{aligned} \theta_\varphi \ : \ & F \to E^* \\ & x \mapsto \varphi_x \end{aligned}$$

Par le théorème du rang, on obtient $\dim F = \dim(\mathrm{Im}\theta_\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}\theta_\varphi)$.
Or, d'une part,

$$\mathrm{Im}\theta_\varphi = \theta_\varphi(F) = \Theta_\varphi(F) = H$$

Par suite, on a $\dim H = \dim F - \dim(\mathrm{Ker}\theta_\varphi)$.
D'autre part,

$$\mathrm{Ker}\theta_\varphi = \{x \in F \mid \varphi_x = 0\} = \{x \in F \mid \forall y \in E, \ \varphi(x, y) = 0\} = F \cap \mathrm{Ker} q$$

Par conséquent, on obtient bien

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \mathrm{Ker} q)$$