Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Mohamed NASSIRI

Notre point de départ est la notion d'espace métrique : un ensemble E muni d'une distance d sur E. On va prendre en particulier, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (*abrégé* $\mathbb{K}$-e.v.) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et considérer une autre application sur E : une *norme*. Grâce à cette norme, on peut définir une distance d par : $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = ||x - y||$, et ainsi, un espace vectoriel normé est muni d'une structure d'espace métrique.

Dans les espaces vectoriels normés, les applications linéaires jouent un rôle particulier et sont facilement manipulables. Par exemple, leur continuité est entièrement déterminée par leur continuité en 0. Mieux, elles sont lipschitziennes (donc en particulier uniformément continue). Ce qui est bien évidemment faux dès que l'application n'est plus linéaire comme le montre la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui est uniformément continue mais pas lipschitzienne.

Parmi les applications linéaires, les formes linéaires sont très utiles car elles permettent de caractériser les hyperplans. En effet, tout hyperplan H d'un espace vectoriel normé E s'écrit comme le noyau d'une forme linéaire Φ non nulle de E^* (et réciproquement !).

En dimension finie, on a le remarquable *théorème de Riesz* qui nous renseigne sur la dimension d'un espace normé $(E, ||.||)$ à partir de la compacité de sa boule unité fermée $B_{f,E}(0, 1) = \{x \in E \mid ||x|| \leq 1\}$.

Dans la grande famille des espaces vectoriels normés (en dimension infinie notamment), il y a deux catégories importantes : les espaces de Banach et de Hilbert. Les espaces de Hilbert sont une généralisation à la dimension infinie des espaces euclidiens. Ils sont particulièrement intéressants car on a un petit plus géométrique dans ces espaces : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc.

Pour comprendre le cheminement des espaces vectoriels aux espaces de Banach et de Hilbert, on peut s'aider du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Espace de Banach}} \arrow[r] & \boxed{\text{Espace de Hilbert}} \\
\boxed{\text{si l'espace est complet pour } ||.||} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{\text{si l'espace est complet pour } ||.||} \arrow[u] \\
\boxed{\text{Espace normé}} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{\text{Espace préhilbertien}} \arrow[u] \\
\boxed{\text{Norme } ||.||} \arrow[u] & \boxed{\text{Norme } ||.|| := \sqrt{\langle .,. \rangle}} \arrow[u] \\
 & \boxed{\text{Espace vectoriel muni d'un produit scalaire}} \arrow[u] \\
\boxed{\text{Espace vectoriel}} \arrow[uu] \arrow[r] & \boxed{\text{Produit scalaire } \langle .,. \rangle} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Base hilbertienne des polynômes orthogonaux

Dans toute la leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Espace vectoriel normé [ML3an] p.107-108

Définition 1 *Un espace vectoriel normé est un couple $(E, ||.||)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $||.||$ est une norme sur E, c'est-à-dire une application de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que :*
1. $\forall x \in E$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \ ||x||$;
3. $\forall x, y \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Exemple 2 *L'application $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.*

Définition 3 *Soit E un espace vectoriel. Deux normes $||.||_1$ et $||.||_2$ sur E sont équivalentes si*

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \quad \lambda ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \mu ||x||_1$$

1.2 Exemples [ML3an] p.109-113

Proposition 4 *Pour tout $x = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$, on définit $||.||_\infty$ par*

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

et, pour $p \in [1, +\infty[$, $||.||_p$ par

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$(\mathbb{K}^n, \ ||.||_p)$, $p \in [1, +\infty]$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 5 *Soient E un ensemble et $(F, ||.||_F)$ un e.v.n. L'espace des applications bornés $\mathcal{B}(E, F)$ muni de l'application N_u de $\mathcal{B}(E, F)$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par*

$$\forall f \in \mathcal{B}(E, F), \quad N_u(f) = \sup_{x \in E} ||f(x)||_F$$

est un espace vectoriel normé.

Proposition 6 *Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux e.v.n. Alors l'espace des applications continues bornées $\mathcal{C}_b^0(E, F)$ est un espace vectoriel normé pour la norme N_u.*

Proposition 7 *Soient $a < b$ deux réels. Pour tout f dans l'ensemble des applications continues $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on définit $||.||_\infty$ par*

$$||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

et, pour $p \in [1, +\infty[$, $||.||_p$ par

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}$$

$(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \ ||.||_p)$, $p \in [1, +\infty]$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 8 *Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace $\mathcal{S}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, on définit $||.||_\infty$ par*

$$||x||_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

et, pour $p \in [1, +\infty[$, $||.||_p$ par

$$||x||_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

On pose alors

$$l^\infty = \{x \in \mathcal{S} \mid ||x||_\infty < +\infty\}$$
$$\forall p \in [1, +\infty[, \quad l^p = \{x \in \mathcal{S} \mid ||x||_p < +\infty\}$$
$$c_0 = \{x \in \mathcal{S} \mid \lim_{x \to +\infty} x_n = 0\}$$
$$c_{00} = \{x \in \mathcal{S} \mid \exists N_x \in \mathbb{N}, \forall k \geq N_x, \ x_k = 0\}$$

1. $(l^p, \ ||.||_p)$, $p \in [1, +\infty]$ *est un espace vectoriel normé.*
2. $(c_0, \ ||.||_\infty)$ *et* $(c_{00}, \ ||.||_\infty)$ *sont des espaces vectoriels normés.*

1.3 Applications linéaires continues [ML3an] p.115-118

Définition 9 *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$-e.v.n. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F.*

Proposition 10 *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$-e.v.n. et f une application linéaire de E dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est continue.
(ii) f est continue en 0.
(iii) f est bornée sur $\overline{B_E(0, 1)}$.
(iv) $\exists a \geq 0$ tel que $||f(x)||_F \leq a||x||_E$, $\forall x \in E$.
(v) f est lipschitzienne.

Exemple 11 *L'application*

$$\mathrm{Id}_{\infty 1} \ : \ (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), ||.||_\infty) \to (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), ||.||_1)$$

est linéaire continue. En revanche, l'application

$$\mathrm{Id}_{1 \infty} \ : \ (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), ||.||_1) \to (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$$

n'est pas continue.

Proposition 12 *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$-e.v.n. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit $||.||_{\mathcal{L}(E,F)}$ par*

$$||.||_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ ||x||_e \leq 1}} ||f(x)||_F$$

$(\mathcal{L}(E,F), ||.||_{\mathcal{L}(E,F)})$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 13 *Dans l'exemple précédent, en notant, $E_\infty = (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ et $E_1 = (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_1)$. On a $||\mathrm{Id}||_{\mathcal{L}(E_\infty, E_1)} = 1$.*

Proposition 14 *Soient (E, N_E), $(F, ||.||_F)$ et $(G, ||.||_G)$ trois $\mathbb{K}$-e.v.n., $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et $||g \circ f||_{\mathcal{L}(E,G)} \leq ||g||_{\mathcal{L}(F,G)} ||f||_{\mathcal{L}(E,F)}$*

Corollaire 15 *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ inversible, on a*

$$||u^{-1}|| \geq ||u||^{-1}$$

1.4 Formes linéaires [ML3an] p.119-120

Définition 16 *Soit (E, N_E) un $\mathbb{K}$-e.v.n.*
Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note
$E^* = L(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{K}$, et
$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires et continues de E dans $\mathbb{K}$.

Proposition 17 *(i) Un sous-espace H de E est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une forme linéaire Φ non nulle de E^* telle que $H = \mathrm{Ker}\Phi$.*
(ii) Une forme linéaire non nulle est complétement déterminée par la donnée de l'image d'un vecteur n'appartenant pas à son noyau.
(iii) Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

Proposition 18 *Soient (E, N_E) et (F, N_F) un $\mathbb{K}$-e.v.n. et Φ une forme linéaire non nulle sur E. Alors $H = \mathrm{Ker}\Phi$ est fermé si et seulement si Φ est continue.*

Proposition 19 *Soient F un hyperplan fermé d'un $\mathbb{R}$-e.v.n. E et Φ une forme linéaire continue telle que $F = \mathrm{Ker}\Phi$. Alors, le complémentaire $E \backslash F$ possède deux composantes connexes*

$$C_+ = \{x \in E \mid \Phi(x) > 0\}, \text{ et}$$

$$C_- = \{x \in E \mid \Phi(x) < 0\}$$

qui sont convexes.

2 Espaces normés de dimension finie [ML3an] p.121-118

Proposition 20 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Proposition 21 *Soient (E, N_E) un espace normé de dimension finie et (F, N_F) un espace normé quelconque. Toute application linéaire f de E dans F est continue.*

Proposition 22 *Soit (E, N_E) un espace normé. Tout sous-espace A de dimension finie de E est complet, donc en particulier fermé.*

Théorème 23 *Théorème de Riesz*
Un espace normé $(E, ||.||)$ est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée $B_{f,E}(0,1) = \{x \in E \mid ||x|| \leq 1\}$ est compacte.

Corollaire 24 *Les compacts d'un espace normé $(E, ||.||)$ de dimension finie sont exactement les fermés bornés.*

3 Espaces de Banach et de Hilbert

3.1 Espaces de Banach

Définition 25 *Un espace vectoriel normé complet s'appelle un espace de Banach.* [**GOUan**] **p.20**

Théorème 26 *Soient (E, d) un espace complet, et (u_n) une suite de Cauchy de E. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.* [**DTZ**] **p.260**

Théorème 27 ♠ *Théorème de Riesz-Fischer* ♠
L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. [**BRZ**] **p.57**

3.2 Espaces de Hilbert

3.2.1 Définitions et premières propriétés [ML3an] p.324 → 326

Définition 28 *Un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ sur $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ tel que l'espace vectoriel $(H, ||.|| = \sqrt{\langle ., . \rangle})$ soit complet.*

Exemple 29 *1) $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ est complet pour la norme associée.*
2) $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\int_X |f|^2}$
3) $l^2(I, \mathbb{K})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\sum_{k \in I} |x_k|^2}$

Proposition 30 *Identité de polarisation*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x+y||^2 + ||x-y||^2}{2}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x+y||^2 + ||x-y||^2}{4} + i\frac{||x+iy||^2 - ||x-iy||^2}{4}$$

Proposition 31 *Identité du parallélogramme*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$. Alors,

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

3.2.2 Orthogonalité [ML3an] p.326 → 330

Définition 32 *Deux éléments $x, y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.*
Deux parties $A, B \subset H$ sont dites orthogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$. On note $A \perp B$.

Proposition 33 *Pour toute partie $A \subset H$, on note*

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$$

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, appelé orthogonal de A dans H qui vérifie
1) si $B \subset A$, alors $A^\perp \subset B^\perp$
2) $A \subset (A^\perp)^\perp$
3) $\overline{A}^\perp = A^\perp$
4) $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}^\perp$
5) $\overline{\mathrm{vect}(A)} \cap A^\perp = \{0\}$

Théorème 34 ♠ *Projection sur un convexe fermé* ♠ *Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.*
Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||x-u|| = \min_{y \in K} ||x-y|| \qquad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \text{ et } \langle x-u, y-u \rangle \leq 0 \ \forall y \in K \qquad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Théorème 35 *Projection sur un sous-espace fermé* *Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $y \in p_K(x)$
2) $y \in K$ et $(x-y) \in K^\perp$

Proposition 36 *Soit K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. Alors l'application $p_K : H \to H, x \mapsto p_K(x)$ est une application linéaire continue qui vérifie :*
1) $p_K \circ p_K = p_K$
2) $\mathrm{Im} p_K = K$ et $\mathrm{Ker} p_K = K^\perp$
3) $\mathrm{Id}_H - p_K$ est la projection sur $K^\perp$
4) $\mathrm{Ker} p_K \oplus \mathrm{Im} p_K = H$

Corollaire 37 *1) Si L est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $L \oplus L^\perp = H$*
2) Si $A \subset H$ est une partie quelconque de H, alors $\overline{\mathrm{vect}(A)} \oplus A^\perp = H$ et $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}$. En particulier, si $A = K$ est un sous-espace vectoriel de H, alors

$$\overline{K} \oplus K^\perp = H \text{ et } (K^\perp)^\perp = \overline{K}$$

3) Si K est un sous-espace vectoriel de H, alors K est dans H si et seulement si $K^\perp = 0$

Corollaire 38 *Un sous-espace vectoriel K de H est dense dans H si et seulement si toute forme linéaire continue sur H et nulle sur K est nulle sur H.*

3.2.3 Polynômes orthogonaux

Définition 39 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de vecteurs de H est dite*
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans H.
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H. [**ML3an**] **p.331**

Proposition 40 *1) Toute famille orthormée est libre*
2) $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$. [**ML3an**] **p.331**

Définition 41 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. [**OBJ**] **p.110**

Théorème 42 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$. [**OBJ**] **p.140 → 143**

Questions

Exercice : Montrer que tout espace vectoriel normé E de dimension finie est complet.

Solution : On va proposer deux méthodes.

<u>Méthode 1 :</u> Notons $n = \dim E$, il existe un isomorphisme linéaire Φ de $\mathbb{K}^n$ sur E. Comme on est en dimension finie, Φ est continu, et même uniformément continu (car lipschitzien).
Par ailleurs, $\mathbb{R}^n$ est complet, donc $\Phi(\mathbb{R}^n) = E$ est également complet.

<u>Méthode 2 :</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Elle est en particulier bornée, et de ce fait, il existe $r > 0$ tel que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset B_{f,E}(0, r)$. Or la boule $B_{f,E}(0, r)$ est compact (car fermée et bornée), donc toute suite de $B_{f,E}(0, r)$ admet une valeur d'adhérence. Par ailleurs, toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $B_{f,E}(0, r)$ (car fermée) donc dans E. Ainsi E est complet.

Exercice : Montrer que $c_{00} \subsetneq l^1 \subsetneq l^2 \subsetneq c_0 \subsetneq l^\infty$

Solution : Toutes les inclusions sont évidentes, sauf $l^1 \subset l^2$. Montrons donc cette inclusion :
Si $x \in l^1$, alors

$$||x||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ (terme général d'une suite convergente). Ainsi, à partir d'un certain rang N, $|x_n| < 1$, et donc $|x_n|^2 \leq |x_n|$. Par conséquent, $x \in l^2$.

Montrons que ces inclusions sont strictes :
- <u>$c_0 \subsetneq l^\infty$:</u> En prenant une suite constante non nulle $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $x \in l^\infty$ et $x \notin c_0$.

- <u>$l^2 \subsetneq c_0$:</u> En considérant la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$, on a $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$) mais

$$||x||_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

donc $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}} \notin l^2$

- <u>$l^1 \subsetneq l^2$:</u> En considérant la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, on a $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, car

$$||x||_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

mais

$$||x||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

donc $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \notin l^1$

- <u>$c_{00} \subsetneq l^1$:</u> En considérant la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, on a $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$, car

$$||x||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

mais la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est manifestement pas nulle à partir d'un certain rang, donc $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} \notin c_{00}$.

Exercice : Montrer que tout hyperplan H d'un espace normé est soit fermé, soit dense dans E.

Solution : Si H n'est pas fermé, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \in \overline{H}\backslash H$. Or H étant un espace vectoriel, donc $\overline{H}$ est aussi un espace vectoriel. Par conséquent, $\mathbb{K}l \subset \overline{H}$. De plus, $E = \underbrace{\mathbb{K}l}_{\subset\overline{H}} + \underbrace{H}_{\subset\overline{H}} \subset \overline{H}$ et l'inclusion $\overline{H} \subset E$ étant évidente, on a $E = \overline{H}$, et ainsi H est dense dans E.