Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Très vite, avec les suites, la notion de limite et de convergence est importante. Cependant, il existe des suites assez particulières. Par exemple, $((-1)^n)$ ne converge pas (elle vaut constamment 1 et -1) et pourtant, quand on regarde les termes pairs et impairs, on tombe sur des suites constantes donc en partiulier convergente. C'est à partir de ce constat que l'on a va définir les "suites extraites" et les "valeurs d'adhérence". Elles vont nous fournir des critères de (non-)convergence d'une suite.

Plusieurs résultats concernant les convergences ou divergences de suites utilisent des "comparaison de suites" : un des plus célèbres résultats est le théorème des gendarmes.

Les suites adjacentes et les suites de Cauchy ont un rôle important. Par exemple, les premières permettent de démontrer que e est irrationnel. Pour les dernières, on peut démontrer que la série harmonique diverge et inutile de rappeler leur rôle dans la complétude ...

On peut définir des "suites récurrentes" à partir de fonction continue. De là va émerger la notion de "vitesse de convergence" qui permet de classifier la convergence des suites récurrentes. La méthode de Newton permet de trouver une approximation de x solution de $f(x) = 0$ pour une certaine fonction f à partir d'une suite récurrente tout en connaissant la vitesse de convergence de cette suite.

Pour finir, avec les séries, et plus particulièrement les comparaisons de séries et d'intégrale, on peut obtenir le célèbre développement asymptotique de la série harmonique. On sait que cette série diverge mais l'intérêt du développement asymptotique est de savoir "comment" elle diverge ...

Références

[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[FGNan1] Analyse 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas

Développements

Méthode de Newton
Développement asymptotique de la série harmonique

1 Suites et convergence

1.1 Limite de suites [ELAM] p.12 → 14

Définition 1 *Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel ou complexe. On dit que* <u>*(u_n) admet pour limite l*</u> *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \text{ implique } |u_n - l| \leq \epsilon$$

Théorème 2 *Si une suite numérique (u_n) admet une limite, alors elle est unique.*

Définition 3 *On dit qu'une suite (u_n) est* <u>*convergente*</u> *si elle admet une limite. Dans le cas contraire, on dit que la suite est* <u>*divergente*</u>.

Proposition 4 *Toute suite numérique convergente est bornée.*

Proposition 5 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et (v_n) est bornée. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$.*

Exemple 6 *La suite $(\frac{\sin n}{n})_{n\geq 1}$ tend vers 0.*

1.2 Valeurs d'adhérence et limites finies [ELAM] p.14 → 19

Définition 7 *Soit (u_n) une suite numérique. On appelle* <u>*sous-suite*</u> *(ou* <u>*suite extraite*</u>*) de la suite (u_n), toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Proposition 8 *Si une suite (u_n) converge vers l, alors toute suite extraite de (u_n) est convergente et admet comme limite l.*

Définition 9 *On appelle* <u>*valeur d'adhérence*</u> *d'une suite (u_n), tout élément de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) limite d'une suite extraite convergente de (u_n).*

Proposition 10 *Toute suite (u_n) convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.*

Remarque 11 *On utilise souvent la contraposée de cette proposition : une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.*

Exemple 12 *La suite de terme général* $(-1)^n$ *est divergente car elle admet* -1 *et* 1 *comme valeur d'adhérence.*

Remarque 13 *Une suite possédant une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente. Exemple : la suite de terme général* $u_n = (1-(-1)^n)n$.

Proposition 14 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites numériques convergeant respectivement vers* l *et* l' *deux nombres complexes. Soit* λ *un nombre complexe. Alors*
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = l+l'$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda u_n = \lambda l$
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n v_n = ll'$, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = |l|$
Si de plus $l' \neq 0$, *alors à partir d'un certain rang, on a* $v_n \neq 0$ *et*
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n} = \frac{1}{l'}$, *donc aussi* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$

Proposition 15 *Convergence en moyenne de Cesàro*
Soit (u_n) *une suite numérique et soit* (v_n) *la suite des moyennes de Cesàro, c'est-à-dire la suite de terme général*

$$v_n = \frac{u_1+...+u_n}{n}$$

Alors si (u_n) *converge vers un nombre complexe* l, (v_n) *converge aussi vers* l. [**ELAM**] **p.53**

Remarque 16 *La réciproque est fausse. Exemple : la suite de terme général* $u_n = (-1)^n$.

Théorème 17 *Théorème des gendarmes*
Soient (u_n), (a_n) *et* (b_n) *trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, on ait* $a_n \leq u_n \leq b_n$. *Si* (a_n) *et* (b_n) *sont convegentes et de même limite* l, *alors* (u_n) *est convergente et sa limite est égale à* l.

1.3 Limites infinies et comparaisons de suite [ELAM] p.20 → 31

Définition 18 *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels. On dit que* (u_n) *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) si, pour tout nombre réel* A, *il existe un entier* N *tel que*

$$n \geq N \text{ implique } u_n \geq A \ (\textit{resp. } u_n \leq A)$$

Proposition 19 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles telles que* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang.*
1) Si $u_n \to +\infty$, *alors* $v_n \to +\infty$
2) Si $v_n \to -\infty$, *alors* $u_n \to -\infty$

Proposition 20 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles.*
1) Si $u_n \to +\infty$ *et* (v_n) *est convergente, alors* $(u_n+v_n) \to +\infty$ *et* $(u_n v_n) \to +\infty$
2) Si $v_n \to -\infty$ *et* $v_n \to +\infty$, *alors* $(u_n+v_n) \to -\infty$ *et* $(u_n v_n) \to -\infty$
3) Si $u_n \to +\infty$ *et* (v_n) *converge vers* $l > 0$ *(resp.* $l < 0$*), alors* $(u_n v_n) \to +\infty$ *(resp.* $-\infty$*)*
4) Si $u_n \to +\infty$, *alors à partir d'un certain rang tous les* (u_n) *sont strictement positifs et la suite* $(1/u_n)$ *converge vers* 0.
5) Si $u_n \to 0$, *et si à partir d'un certain rang tous les* (u_n) *sont strictement positifs et la suite* $(1/u_n) \to +\infty$.

Remarque 21 *Dans le point 5) de la proposition, l'hypoyhèse sur le signe est indispensable : la suite de terme général* $(-1)^n/n$ *converge vers* 0 *mais son inverse* $(-1)^n n$ *ne tend ni vers* $-\infty$, *ni vers* $+\infty$

Définition 22 • *On dit qu'une suite* (u_n) *est dominée par une suite réelle positive* (α_n), *et on note* $u_n = O(\alpha_n)$, *s'il existe une constante* $A \in \mathbb{R}_+$ *et un entier* n_0 *tels que, pour tout* $n \geq n_0$, *on ait*

$$|u_n| \leq A\alpha_n$$

• *On dit qu'une suite* (u_n) *est négligeable devant une suite réelle positive* (α_n), *et on note* $u_n = o(\alpha_n)$, *si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un entier* n_0 *tel que, pour tout* $n \geq n_0$, *on ait*

$$|u_n| \leq \epsilon\alpha_n$$

Exemple 23 • *Si* (u_n) *est bornée, on a clairement* $u_n = O(1)$.
• *Si* (u_n) *converge vers* 0, *on a bien sûr* $u_n = o(1)$.

Proposition 24 *1) Une suite* (u_n) *est dominée par une suite réelle positive* (α_n) *si et seulement si, il existe un entier* n_0 *et une suite* (v_n) *bornée tels que* $u_n = \alpha_n v_n$ *pour tout* $n \geq n_0$
1) Une suite (u_n) *est négligeable devant une suite réelle positive* (α_n) *si et seulement si, il existe un entier* n_0 *et une suite* (v_n) *convergeant vers* 0 *tels que* $u_n = \alpha_n v_n$ *pour tout* $n \geq n_0$

Corollaire 25 *On suppose qu'il existe un entier* n_0 *tel que pour tout* $n \geq n_0$, *on ait* $v_n \neq 0$. *Alors la suite* (u_n) *est négligeable devant la suite* (v_n) *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0$

Définition 26 *On dit qu'une suite* (u_n) *est équivalente à une suite* (v_n), *et on note* $u_n \sim v_n$, *la suite* $(u_n - v_n$ *est négligeable devant la suite* $(|u_n|)$

Proposition 27 *Deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes si et seulement s'il existe un entier naturel* n_0 *et une suite* (α_n) *convergeant vers* 1 *et vérifiant* $u_n = \alpha_n v_n$ *pour tout* $n \geq n_0$

Proposition 28 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites. On suppose qu'il existe un entier* n_0 *tel que pour tout* $n \geq n_0$*, on ait* $v_n \neq 0$*. Alors* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes si et seulement si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Proposition 29 *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites équivalentes et si* (u_n) *converge vers* l*, alors* (v_n) *converge vers* l*.*

Remarque 30 • *La réciproque est manifestement vraie si* $l \neq 0$*. Si* $l = 0$*,* (u_n) *et* (v_n) *ne sont pas nécessairement équivalentes. Exemple : les suites* $(1/n)$ *et* $(1/n^2)$*.*
• *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites réelles de même limite* $\pm\infty$*, elles ne sont pas nécessairement équivalentes. Exemple : les suites* (n) *et* (n^2)*.*

Proposition 31 *Soient* (u_n)*,* (v_n)*,* (u'_n)*,* (v'_n) *des suites.*
1) Si $u_n \sim v_n$ *et* $u'_n \sim v'_n$*, alors* $u_n u'_n \sim v_n v'_n$
2) Si $u_n \sim v_n$ *et* $u'_n \sim v'_n$*, alors* $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$ *(pourvu que ces quotients soient définis)*
3) Si $u_n \sim v_n$*, alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, on a* $u_n^k \sim v_n^k$

Proposition 32 *Soient* (u_n) *une suite telle que* $u_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang. On suppose que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ *et que* $|l| < 1$*. Alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$*.*

Exemple 33 *Si* a *est un nombre réel donné, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

1.4 Suites adjacentes et suites de Cauchy [ELAM] p.33 → 36

Définition 34 *Deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont dites* *adjacentes* *elles vérifient les propriétés suivantes :*
1) (u_n) *est croissante et* (v_n) *est décroissante,*
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 35 *Si deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite. De plus, en notant* l *cette limite commune, on a :* $u_n \leq l \leq v_n$ *pour tout* n*.*

Exemple 36 *Les suites de terme général* $u_n = 1 - 1/n$ *et* $v_n = 1 + 1/n^2$ *sont adjacentes.*

Définition 37 *On dit qu'une suite* (u_n) *est une suite de Cauchy si, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un entier* N *(dépendant de* ϵ*) tel que, pour tout* $m \geq N$ *et tout* $n \geq N$*, on ait* $|u_n - u_m| \leq \epsilon$*.*

Remarque 38 *La condition ci-dessus s'écrit aussi : pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *et tout* $n \geq N$ *:* $n \geq N$ *implique* $|u_{n+p} - u_n| \leq \epsilon$*.*

Proposition 39 *1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy*
2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 40 *Soit* (u_n) *une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence* l*. Alors* (u_n) *converge vers* l*.*

Théorème 41 *Dans* $\mathbb{R}$*, toute suite de Cauchy est convergente.*

Exemple 42 *La suite de terme général* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy.*

Théorème 43 *Théorème de Bolzano-Weierstrass*
Dans $\mathbb{R}$*, toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.*

2 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

2.1 Définitions et premières propriétés [ELAM] p.38-39

Définition 44 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*.* (u_n) *est dite suite récurrente si elle est définie par la donnée de* u_0 *et la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$*, où* $f : I \to \mathbb{R}$ *est une application continue.*

Proposition 45 *Si la suite* (u_n) *d'éléments de* I *converge vers* $l \in I$*, alors nécessairement* $f(l) = l$*.*

Exemple 46 *Si la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$*, sa limite est nécessairement égale à* -1 *ou* 3*.*

Proposition 47 *Soit* (u_n) *une suite réelle définie par la donnée de* u_0 *et la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$*. On suppose de plus que* $f(I) \subset I$*.*
1) Si f *est croissante sur* I*, alors la suite* (u_n) *est monotone.*
2) Si f *est décroissante sur* I*, alors les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont monotones de sens de variation opposés.*

Exemple 48 *Etude de la suite définie par* $u_{n+1} = \sin(u_n)$*,* $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$*.*

2.2 Vitesse de convergence [ELAM] p.39 → 43

Définition 49 *On dit qu'une suite* (u_n) *converge géométriquement vers* 0 *si elle est dominée par une suite géométrique* (k^n) *avec* $0 < k < 1$*.*

Théorème 50 *Critère de D'Alembert*
Soit (u_n) *une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ *tel que* $0 < k < 1$*. Alors la suite* (u_n) *converge géométriquement vers* 0*.*

Exemple 51 *Etude des suites récurrentes : (u_n) définie $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f est de classe C^1 et qui admet un point fixe attractif ((i.e.) $0 < |f'(\alpha)| < 1$). (u_n) converge géométriquement vers α*

Proposition 52 Critère de Cauchy
Une suite (u_n) de nombres réels positifs converge géométriquement si et seulement si $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$.

Définition 53 *On dit qu'une suite (u_n) converge lentement vers 0 si elle est minorée par une suite du type (A/n^α) avec A et α des nombres réels strictement positifs.*

Définition 54 *On dit qu'une suite (u_n) tend vers 0 avec une convergence (au moins) quadratique si elle est dominée par une suite (k^{2n}) avec $0 < k < 1$.*

Théorème 55 *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergente vers 0. On suppose que la suite (u_{n+1}/u_n^2) a une limite finie (ou simplement qu'elle est bornée). Alors la convergence de (u_n) est quadratique.*

Théorème 56 ♠ Méthode de Newton ♠
- *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c,d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.
Alors pour $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a-\alpha, a+\alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a.*
- *De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a,d]$, la méthode converge et on a :*

$$0 \le x_{n+1} - a \le C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ si } n \to +\infty$$

[**ROU**] **p.152**

3 Séries [ELAM] p.82→92

Définition 57 *On appelle série télescopique associée à une suite (a_n), la série $\sum u_n$, où $u_n = a_n - a_{n-1}$*

Proposition 58 *Soit $\sum u_n$ une série télescopique associée à une suite (a_n). Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de la même nature, et en cas de convergence, on a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} u_n - a_0$$

Exemple 59

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Théorème 60 Règle de comparaison *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge 0$. Alors
1) si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

2) si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème 61 Règle d'équivalence *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors
1) Les séries sont de même nature.
2) En cas de convergence, les restes sont équivalents.
3) En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.*

Théorème 62 Règle de domination *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$) lorsque $n \to +\infty$.
Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \textit{ lorsque } n \to +\infty$$

$$\left(\textit{resp. } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)\right)$$

Théorème 63 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante.
Alors la série $\sum f(n)$ (avec $n \ge a$) et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \le \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 64 ♠ Développement asymptotique de la série harmonique ♠
*On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}$ pour $n \ge 1$.
Alors le développement asymptotique de H_n à quatre termes est :*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où γ est la constante d'Euler. [**FGNan1**] **p.145**

Questions

Exercice : 1) Montrer que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas convergente.
2) Montrer que e est irrationnel.

Solution : 1) Il suffit de regarder :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}(2n - (n+1) + 1) = \frac{1}{2}$$

Ainsi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle n'est pas convergente.

2) On sait que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.
Posons

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

- La suite (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$
- La suite (v_n) est décroissante car $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n!} < 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et tendent vers e. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n < e < v_n$$

Supposons e rationnel. Il existe donc $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tels que $e = \frac{p}{q}$. On a donc

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q \quad \Leftrightarrow \quad q!u_q < p(q-1)! < q!v_q \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{q!u_q}_{:=N\in\mathbb{N}} < p(q-1)! < \underbrace{q!u_q}_{=N}+1$$

La dernière inégalité montre que l'entier $p(q-1)!$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs. Absurde !

Exercice : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \max(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad m_n = \min(u_n, v_n)$$

Montrer que les suites (M_n) et (m_n) convergent et préciser leur limite en fonction de celles des suites (u_n) et (v_n).

Solution : On aura besoin du résultat (très utile) suivant : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \max(x,y) = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|) \\ \min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|) \end{cases}$$

On distingue deux cas :
- <u>Cas 1 : $x < y$</u>
Alors $\max(x,y) = y$ et $|x-y| = y-x$, et donc, on a bien $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = y = \max(x,y)$
- <u>Cas 1 : $x \geq y$</u>
Alors $\max(x,y) = x$ et $|x-y| = x-y$, et donc, on a bien $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x = \max(x,y)$
La formule pour le min se démontre de la même façon.

Par conséquent, on peut écrire :

$$M_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n + |u_n - v_n|) \quad \text{et} \quad m_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n - |u_n - v_n|)$$

En notant $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} M_n &= \frac{1}{2}(l + l' + |l - l'|) = \max(l, l') \\
\lim_{n\to+\infty} m_n &= \frac{1}{2}(l + l' - |l - l'|) = \min(l, l')
\end{aligned}$$

Exercice : Soit (u_n) une suite de nombres complexes définie par la relation de récurrence

$$u_{n+k} = \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \alpha_{k-2}u_{n+k-2} + ... + \alpha_0 u_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{C},\ \alpha_0 \neq 0 \qquad (\clubsuit)$$

et où bien évidemment les k premiers termes de la suite (u_n) sont déterminés.
Montrer que si le polynôme $P(X) = X^k - \alpha_{k-1}X^{k-1} + \alpha_{k-2}X^{k-2} - ... - \alpha_1 X - \alpha_0$, dit polynôme caractéristique, est à racines simples $\lambda_1, ..., \lambda_k$ alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $(\clubsuit)$ a pour base $\{(\lambda_i^n)_{n\geq 0},\ i = 1, ..., k\}$

Solution : On pose

$$\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+k} = \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \alpha_{k-2}u_{n+k-2} + ... + \alpha_0 u_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{C},\ \alpha_0 \neq 0\}$$

On peut déjà remarque que l'on a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^k \\
u &\mapsto (u_0, ..., u_{k-1})
\end{aligned}$$

On considère l'application *décalage à gauche* (ou *shift*) :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\
(u_n)_{n\geq 0} &\mapsto (u_{n+1})_{n\geq 0}
\end{aligned}$$

φ est linéaire et si $u \in \mathcal{E}$, $u_n = (\varphi^n(u))_0$. Ecrivons la matrice M de φ (vu comme un endomorphisme de $\mathbb{C}^k$) dans la base $((1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1))$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(1, 0, 0, 0, ..., 0, 0) &= (0, 0, 0, ..., 0, \alpha_0) \\
\varphi(0, 1, 0, 0, ..., 0, 0) &= (1, 0, 0, ..., 0, \alpha_1) \\
\varphi(0, 0, 1, 0, ..., 0, 0) &= (0, 1, 0, ..., 0, \alpha_2) \\
&\vdots \\
\varphi(0, 0, 0, 0, ..., 0, 1) &= (0, 0, 0, ..., 1, \alpha_{k-1})
\end{aligned}$$

d'où

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1}
\end{pmatrix}$$

On obtient $\chi_M(X) = \chi_{{}^tM}(X) = \det(XI - M) = X^k - \alpha_{k-1}X^{k-1} + \alpha_{k-2}X^{k-2} - ... - \alpha_1 X - \alpha_0$. Par hypothèse, $P(X)$ est à racines simples $\lambda_1, ..., \lambda_k$ donc on peut diagonaliser M dans une base de vecteurs propres $(v^{(1)}), ..., (v^{(k)})$, qui vérifient donc $\varphi(v^{(i)}) = \lambda_i v^{(i)}$.

Ch'tite parenthèse : Il ne faut pas oublier que les $(v^{(1)}), ..., (v^{(k)})$ sont des suites ! En fait, on devrait écrire $v^{(i)} = (v_n^{(k)})_{n\geq 0}$, mais la notation est lourde ...

Soit $u \in \mathcal{E}$, donc u peut s'écrire dans la base $(v^{(1)}), ..., (v^{(k)})$ et on a $u = \sum_{i=1}^k a_i v^{(i)}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n = (\varphi^n(u))_0 = \varphi^n\left(\sum_{i=1}^k a_i v^{(i)}\right)_0 &= \left(\sum_{i=1}^k a_i \varphi^n(v^{(i)})\right)_0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i \lambda_i^n (v^{(i)})\right)_0 \\ &= \sum_{i=1}^k a_i v_0^{(i)} \lambda_i^n \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien une combinaison linéaire de λ_i^n pour $i = 1, ..., k$. La famille $\{(\lambda_i^n)_{n\geq 0},\ i = 1, ..., k\}$ est donc génératrice. Par ailleurs, comme elle est de cardinal $k = \dim\mathcal{E}$, l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathcal{E}$ (donc vérifiant ($\clubsuit$)) a pour base $\{(\lambda_i^n)_{n\geq 0},\ i = 1, ..., k\}$.
