Théorème de Weierstrass (par la convolution)

Mohamed NASSIRI

Référence :

Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon, p.284 → 286

Recasage :

●●●●● 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
●●●●● 202 : Exemples de parties denses et applications.
●●●●● 203 : Utilisation de la notion de compacité.
●●●●● 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
●●●○○ 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
●●●○○ 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Résumé :

Blablabla

Prérequis :

Convolution - Approximations de l'unité - Convergence uniforme

---

Théorème : Si J est un segment de $\mathbb{R}$, et si $f : J \to \mathbb{C}$ est continue, alors f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynôme.

Démonstration. On note $C_c^0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support compact. En considérant une fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R})$, on va utiliser la convolution avec des approximations de l'unité pour construire une suite de polynômes qui va tendre uniformément sur un segment de $\mathbb{R}$ vers f.

Etape 1 : Convergence uniforme à l'aide des approximations de l'unité :

Soit $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité et $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Montrons que la suite $(f * \chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme la fonction f est continue et nulle en dehors d'un compact, elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et ainsi

$$\exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{|t|>\eta} \chi_n(t)\mathrm{d}t < \epsilon \ \text{ pour tout } n \geq N$$

En se rappelant que $\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)\mathrm{d}t = 1$ et que les fonctions χ_n sont positives, on a pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ |f * \chi_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\chi_n(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_{|t|>\eta} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t)\mathrm{d}t + \int_{-\eta}^{+\eta} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leq 2||f||_\infty \epsilon + \epsilon \int_{-\eta}^{+\eta} \chi_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leq 2||f||_\infty \epsilon + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)\mathrm{d}t = (2||f||_\infty + 1)\epsilon\end{aligned}$$

Par passage au supremum sur $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$||f * \chi_n - f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f * \chi_n(x) - f(x)| \leq (2||f||_\infty + 1)\epsilon$$

D'où la convergence uniforme.

Etape 2 : Choix d'une approximation de l'unité particulière :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} p_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \begin{cases} (1-t^2)^n/\alpha_n & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{avec } \alpha_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathrm{d}t$$

Montrons que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions p_n sont manifestement positives.
- Puis, par définition de α_n, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} p_n(t)\mathrm{d}t = 1$$

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

donc si $\alpha > 0$ (et $\alpha < 1$), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{|t|>\alpha} p_n(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\alpha_n}\int_\alpha^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \geq \frac{2}{\alpha_n}(1-\alpha^2)^n \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n$$

et comme $|1-\alpha^2|^n < 1$, on a donc

$$\int_{|t|>\alpha} p_n(t)\mathrm{d}t \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Etape 3 : Montrons que $f * p_n$ est un polynôme :

Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$, nulle en dehors de $I = [-1/2, 1/2]$. Alors, pour tout $x \in I$, on a

$$f * p_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} p_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t \qquad (\dagger)$$

Lorsque $x \in I$ et $t \in I$, on a $|x-t| \leq 1$, donc

$$p_n(x-t) = (1-(x-t)^2)^n/\alpha_n$$

et en développant le second membre, on peut écrire

$$p_n(x-t) = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k$$

où, pour tout k, q_k est une fonction polynôme. En remplaçant dans (†), on a donc pour tout $x \in I$, on a

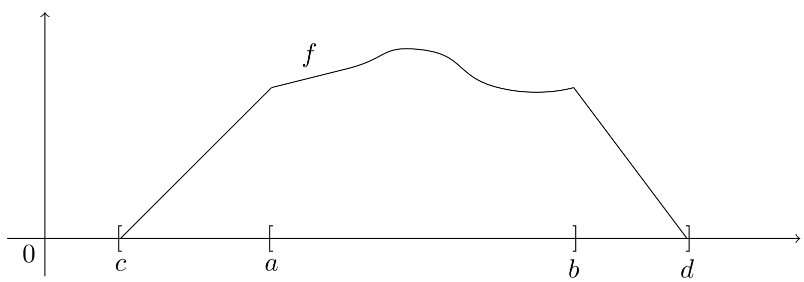
$$f * p_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} q_k(t)f(t)\mathrm{d}t \right) x^k$$

qui est bien une fonction polynôme sur I.

<u>*Conclusion :*</u>

Par l'*étape 1* et *2*, on en déduit donc que la suite $(f * p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, *a fortiori* sur I. Donc f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme.

Soit maintenant $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. En considérant un intervalle plus grand $[c,d]$ (avec $c < a$ et $b < d$), on prolonge f sur $[c,a]$ (*resp.* sur $[b,d]$) par une fonction affine prenant la valeur 0 en c et la valeur $f(a)$ en a (*resp.* la valeur 0 en d et la valeur $f(b)$ en b). On prolonge ensuite f sur $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = 0$ en dehors de $[c,d]$.
Ainsi, le prolongement de f que l'on vient de construire est continu sur $\mathbb{R}$, et est nul en dehors d'un compact. Donc $f \in C_c^0(\mathbb{R})$.



Ensuite, en effectuant un changement de variable affine, on peut se ramener au cas où $[c,d] = [-1/2, 1/2]$. Ainsi, la fonction f est limite uniforme sur $[c,d]$ d'une suite de polynôme, donc en particulier sur $[a,b] \subset [c,d]$. □

<u>**Remarques :**</u>

- **Fonctions à support compact :** Nous avons considéré au tout début de cette démonstration l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support compact que nous avons noté $C_c^0(\mathbb{R})$.
  On rappelle quelques définitions :

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
(i) On appelle <u>support de f dans I</u> l'ensemble

$$\mathrm{supp}_I(f) := \overline{\{x \in I \mid f(x) \neq 0\}} \subseteq I$$

où l'adhérence est relative à la topologie de I.
(ii) On dit que f est <u>à support compact</u> si $\mathrm{supp}_I(f)$ est un compact de I.

La notion de support dépend du domaine de définition de f ! Par exemple, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-\frac{1}{1-x^2}}\chi_{]-1,1[}(x) \end{aligned}$$

a pour support $[-1,1]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$. Elle est donc à support compact dans $\mathbb{R}$. En revanche, la fonction

$$\begin{aligned}]-1,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-\frac{1}{1-x^2}}\chi_{]-1,1[}(x) \end{aligned}$$

a pour support $]-1,1]$ qui est un fermé dans $]-1,+\infty[$ (car c'est le complémentaire de $]-1,+\infty[\setminus]-1,1]=]1,+\infty[$ qui est un bien un ouvert de $]-1,+\infty[$). Mais $]-1,1]$ n'est pas un compact $]-1,+\infty[$ car ce n'est pas un fermé borné de $\mathbb{R}$.

- **Convolution :**

- **Approximations de l'unité :**
On rappelle qu'une approximation de l'unité est une suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives de $C_c^0(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)\mathrm{d}t = 1 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{|t|>\alpha} \chi_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

Parmi les approximations de l'unité, on peut citer :

$$\begin{aligned} \text{Approximation de Laplace} \quad &: \quad \chi_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|} \\ \text{Approximation de Cauchy} \quad &: \quad \chi_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2} \\ \text{Approximation de Gauss} \quad &: \quad \chi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n^2x^2}{2}} \end{aligned}$$

Dans la démonstration, nous avons montré dans l'*étape 1* que

"Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f * \chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$."

- **Un résultat dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$:**
Il se trouve que l'on a même théorème dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$.

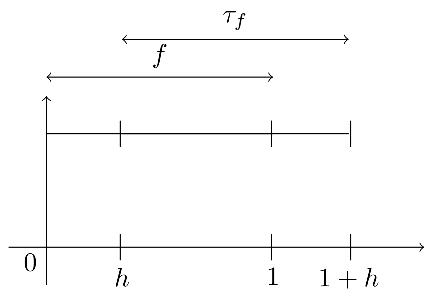
Théorème : Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $(f * \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Démonstration :
demo

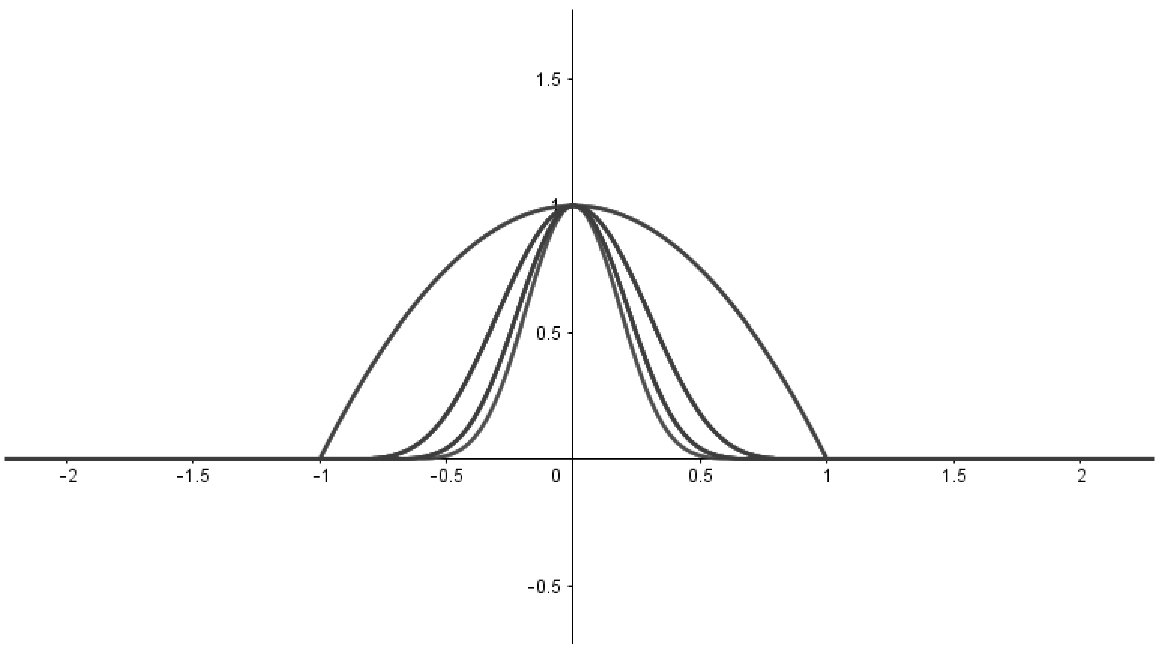
□

Ce théorème est faux dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Ceci provient du fait que l'opérateur de translation n'est pas continue dans $L^\infty(\mathbb{R})$. En effet, en prenant $\chi_{[0,1]}$, on a pour tout $h \neq 0$,

$$||\tau_h(f) - f||_\infty = 1 \underset{h\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$



- **Approximation de l'unité p_n :**
  Voici à quoi ressemble l'approximation p_n que nous avons introduit :



Tracé de p_1, p_6, p_{11} et p_{15}

- **Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:**
  Le théorème de Weierstrass nous dit qu'une fonction continue *sur un segment de* $\mathbb{R}$ est limite uniforme (sur ce segment) d'une suite de polynôme. On peut se poser la question de cette convergence sur $\mathbb{R}$ tout entier. On va montrer que les fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de suites de polynômes sont en fait les polynômes.

  Démonstration :
  Soit donc une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $P_n \xrightarrow{CVU} f$ (*i.e.*)
  Soit $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \geq N \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| < \epsilon$
  Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p, q \geq N \Rightarrow |P_p(x) - P_q(x)| \leq |P_p(x) - f(x)| + |P_q(x) - f(x)| \leq 2\epsilon$
  Donc le polynôme $P_p - P_q$ est borné, et par conséquent constant. Autrement dit, pour $p, q \geq N$, $P_p - P_q = c_{pq}$ (constante qui dépend de p et q).
  En fixant $q = N$, on a pour $p \geq N$, $P_p - P_N = c_p$. ($\blacklozenge$)
  Et du coup, pour $p \geq N$, $q \geq N$, on a $P_p - P_q = c_p - c_q$.
  Ainsi, pour $p \geq N$, $q \geq N$, on a $|c_p - c_q| \leq 2\epsilon$ et donc (c_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est

complet, donc converge vers c dans $\mathbb{R}$.
En passant à la limite ($p \to +\infty$) dans ($\blacklozenge$), on a $f - P_N = c$, et ainsi $f = P_N + c$ est bien un polynôme.

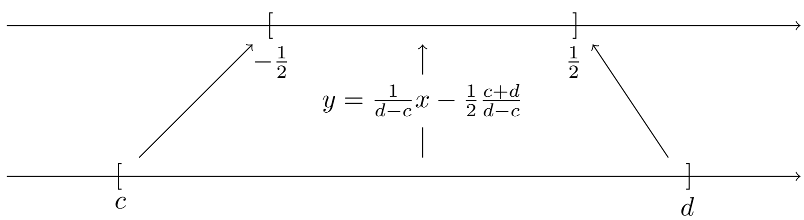
$\square$

- **Changement de variable affine :**
  A la fin de la preuve, nous avons écrit :

  "en effectuant un changement de variable affine, on peut se ramener au cas où $[c, d] = [-1/2, 1/2]$*"*

  Explicitons un peu ce changement. Il s'agit donc d'un changement de variable affine, donc de la forme $y = \alpha x + \beta$. Comme c doit s'envoyer sur $-\frac{1}{2}$ et d sur $\frac{1}{2}$, ce changement de variable doit vérifier le système suivant

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} & = \alpha c + \beta \\ \frac{1}{2} & = \alpha d + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = \frac{1}{d-c} \\ \beta & = -\frac{1}{2}\frac{c+d}{d-c} \end{cases}$$



- **Fonctions "plateau" :**