Théorème de Gauss-Lucas

Mohamed NASSIRI

Références :

Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas - p.229 → 231

Recasage :

●●●●● 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
●●●●● 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
●●●●○ 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Résumé :

Ce théorème est un théorème de localisation de racines de polynômes. En effet, il localise les racines du polynôme dérivé P' dans l'enveloppe convexe du polynôme P.

Prérequis :

Racines d'un polynôme - Barycentres - Convexité

Théorème : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Démonstration.
On écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{n_k}$ où $r \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1, ...\lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P et $n_1, ..., n_r$ leur ordre respectif. On a :

$$\frac{P'}{P} = (\ln P)' = \left(\ln\left(\lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{n_k}\right)\right)' = \left(\ln\lambda + \sum_{k=1}^{r} n_k (X - \lambda_k)\right)' = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{X - \lambda_k}$$

Soit z une racine de P'.
Si z est l'une des racines λ_k, elle est évidemment dans l'enveloppe convexe des racines de P.
Sinon, on peut écrire

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{z - \lambda_k} = \sum_{k=1}^{r} n_k \frac{\overline{z - \lambda_k}}{|z - \lambda_k|^2}$$

Ce qui donne en conjuguant

$$\sum_{k=1}^{r} n_k \frac{z - \lambda_k}{|z - \lambda_k|^2} = 0$$

En isolant z, ona :
$$\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}z=\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}\lambda_k \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}\lambda_k}{\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}}$$
Comme chaque $\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}>0$, cette formule exprime que z est un barycentre à coefficients strictement positifs des λ_k.

$\square$

Corollaire : Le plus grand entier $n\geq 2$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^n-X^n-1$ soient de module 1 est 7.

Démonstration.
Si $n=2$:
$$P(X)=(X+1)^2-X^2-1=2X$$
a une seule racine qui est 0. On peut donc supposer $n>2$.

Si $n\geq 3$:
$$P(X)=(X+1)^n-X^n-1 \quad\Rightarrow\quad P'(X)=n(X+1)^{n-1}-nX^{n-1}$$
Si z est une racine de P', on remarque que $z\neq 0$, et donc
$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1}=1$$
Il existe donc $k\in[\![0,n-2]\!]$ tel que
$$\frac{z+1}{z}=e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$$
En fait, on a $k\neq 0$ puisque $z+1\neq z$. Ainsi, les $n-2$ racines de P' sont les nombres complexes
$$z_k=\frac{e^{\frac{-ik\pi}{n-1}}}{2i\sin\frac{k\pi}{n-1}} \quad \text{pour } (1\leq k\leq n-2)$$
Si toutes les racines de P sont de module 1, d'après le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont nécessairement dans le disque unité.

Si $n\geq 8$:

Analysons la racine la plus facile : z_1. Le module de z_1 est
$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n-1}}>0$$
et pour $n\geq 8$, on a
$$2\sin\frac{\pi}{n-1}<2\sin\frac{\pi}{6}=1 \quad\Rightarrow\quad |z_1|>1$$
donc un entier $n\leq 8$ ne convient pas.

Si $n=7$:

Posons $P_0(X)=(X+1)^7-X^7-1$. Manifestement, -1 et 0 sont racines de P_0. Ainsi, P_0 s'écrit
$$P_0(X)=X(X+1)(7X^4+14X^3+21X^2+14X+7)$$

Le polynôme $Q(X) = (7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7)$, qui est un polynôme réciproque, peut se mettre sous la forme $X^2 R(X + \frac{1}{X})$ où $R \in \mathbb{R}[X]$. En effet, en posant $Y = X + \frac{1}{X}$, on a

$$\begin{aligned}
Q(X) &= 7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7 \\
&= X^2\left(7\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 14\left(X + \frac{1}{X}\right) + 21\right) \\
&= X^2(7Y^2 - 14 - 14Y + 21) \\
&= 7X^2(Y-1)^2 \\
&= 7X^2(X + \frac{1}{X} - 1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, une racine z de P_0 distincte de 0 et -1 doit vérifier

$$z + \frac{1}{z} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -j \text{ ou } z = -j^2$$

L'ensemble des racines de P_0 est donc $\{0, -1, -j, -j^2\}$ qui est contenu dans le disque unité.

Conclusion : Le plus grand entier $n \geq 2$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1 est 7.

□

Corollaire : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ. On suppose que P' a une racine dans H_1. Alors $P(H_1) = \mathbb{C}$.

Démonstration.
Supposons $P(H_1) \neq \mathbb{C}$.
Considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \notin P(H_1)$. Les racines du polynôme $P - z$ appartiennent donc à $\mathbb{C} \backslash H_1 = \overline{H_2}$.
Comme $\overline{H_2}$ est convexe, les racines de P' sont encore dans $\overline{H_2}$, ce qui contredit l'existence d'une racine de P' dans H_1. Donc $P(H_1) = \mathbb{C}$. □

Remarques :

- Sur le site *Images des Mathématiques (CNRS)*, Arnaud Chéritat et Tan Lei mijoté un exemple particulier et amusant : $P(z) = (z^2 + 2)(z-4)^2$. Il se factorise ainsi :

  $$P(z) = (z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})(z-4)(z-4)$$

  et se développe ainsi :

  $$P(z) = z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 16z + 32$$

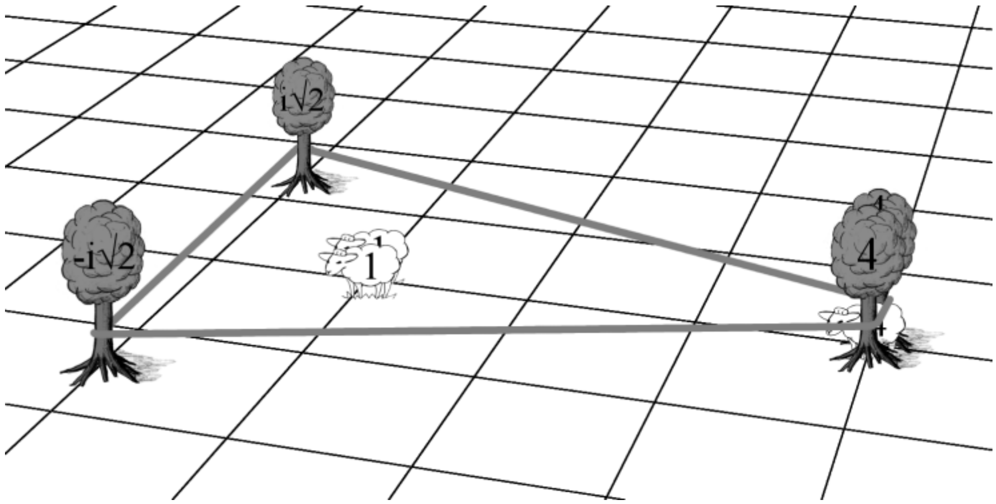
  . Sa dérivée

  $$P'(z) = 4z^3 - 24z^2 + 36z - 16$$

  se factorise ainsi :

  $$P'(z) = 4(z-1)(z-1)(z-4)$$

  L'enveloppe convexe des racines de P est le triangle de sommets $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, 4 et les racines de P' sont 1, 1 et 4, qui sont bien dans l'enveloppe convexe, la dernière étant pile sur un sommet. Dans l'image ci-dessous, nous avons figuré les racines de P comme des arbres et fait appel à des moutons pour celles de P'. Le bord de l'enveloppe convexe correspond à la clôture (l'épaisseur des arbres nous a obligés à la décaler légèrement).



- Revenons sur la notion d'enveloppe convexe. Nous avons utiliser le fait que l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycenres à coefficient positifs de points de $\mathcal{A}$. Or, ce n'est pas la définition "intuitive et originel" de l'enveloppe convexe.

Définition : Soit E est un espace affine sur $\mathbb{R}$ de direction un espace vectoriel.
Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de E. Le convexe

$$\begin{aligned} Conv(\mathcal{A}) &= \bigcap_{\substack{\mathcal{C}\ convexe \\ \mathcal{A}\subset\mathcal{C}}} \mathcal{C} \\ &= \mathrm{Min}\{\mathcal{C} \mid \mathcal{C}\ convexe\ et\ \mathcal{A}\subset\mathcal{C}\} \end{aligned}$$

où le minimum est considéré pour la relation d'ordre $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$.

Théorème : L'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{A}$.

Démonstration :
Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{A}$.
∘ $\mathcal{B}$ contient manifestement $\mathcal{A}$.
∘ Montrons que $\mathcal{B}$ est convexe :
Soient $M = \sum_{i\in I} \alpha_i A_i$ et $N = \sum_{i\in J} \beta_i B_i$, avec $A_i, B_i \in \mathcal{A}$, $\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{i\in J} \beta_i = 1$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$. En fait, on peut supposer que $I = J$ et que $A_i = B_i$ pour tout $i \in I$, quitte à introduire des coefficients supplémentaires α_i et β_i nuls.
Ainsi, tout point P du segment $[MN]$ s'écrit

$$\begin{aligned} P = tM + (1-t)N &= t\sum_{i\in I} \alpha_i A_i + (1-t)\sum_{i\in I} \beta_i A_i \quad \text{où } t \in [0,1] \\ &= \sum_{i\in I} (t\alpha_i + (1-t)\beta_i) A_i \end{aligned}$$

Par conséquent, P est un barycentre des A_i affectés de coefficients positifs, et donc $P \in \mathcal{B}$.
∘ Si $\mathcal{C}$ est un convexe contenant $\mathcal{A}$, montrons qu'il contient $\mathcal{B}$:
On démontre la propriété suivante par récurrence sur k

$\mathcal{H}(k)$: « Tout barycentre à coefficients positifs de moins de k points de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{C}$. »

Les propriétés $\mathcal{H}(1)$ et $\mathcal{H}(2)$ sont trivialement vérifiées. Supposons $\mathcal{H}(k)$ vraie et montrons la propriété $\mathcal{H}(k+1)$. Soit $M = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i A_i$ avec $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ et $A_i \in \mathcal{A}$.

Si l'un des α_i est nul, alors $M \in \mathcal{C}$ d'après $\mathcal{H}(k)$.
Si tous les α_i sont strictement positifs, alors $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$, et l'associativé du barycentre montre que M est barycentre de $(g, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i)$ et (A_{k+1}, α_{k+1}) où g est barycentre de $(A_1, \alpha_1), ..., (A_k, \alpha_k)$. Par hypothèse récurrente $g \in \mathcal{C}$, et comme $\mathcal{C}$ est convexe et $A_{k+1} \in \mathcal{C}$, on déduit $M \in \mathcal{C}$.

□

- Comme nous sommes sur une bonne lancée sur l'enveloppe convexe, donnons deux corollaires du théorème précédent :

Corollaire : Une partie non vide de E est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration à coefficients positifs.

Démonstration :
Si $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} \text{ convexe} \Leftrightarrow \mathcal{C} = Conv(\mathcal{C}) \Leftrightarrow Conv(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$$

□

Théorème : Théorème de Carathéodory Si $\dim E = n$, alors tout point de l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est barycentre à coefficients positifs de moins de $n+1$ points de $\mathcal{A}$.

Démonstration :
Tout point M de $Conv(\mathcal{A})$ s'écrit $M = t_1 A_1 + ... + t_k A_k$ ou $A_i \in \mathcal{A}$, $t_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$. Supposons $k > n+1$. Le système $(\overrightarrow{A_1 A_2}, ..., \overrightarrow{A_1 A_k})$ est lié, donc il existe des réels α_i non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{k} \overrightarrow{A_1 A_i} = \overrightarrow{0}$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{OA_i}$$

avec $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$, où $a_1 = -(\sum_{i=2}^{k} \alpha_i)$ et $a_i = \alpha_i$ si $i = 2, ..., k$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i} - \lambda \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{k} (t_i - \lambda a_i) \overrightarrow{OA_i}$$

Comme $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ et comme les a_i ne sont pas tous nuls, il existe au moins un indice i tel que $a_i > 0$, et l'on peut choisir :

$$\lambda = \min \left\{ \frac{t_i}{a_i} \mid a_i > 0 \right\} := \frac{a_j}{t_j}$$

Dans ce cas,

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} (t_i - \lambda a_i) \overrightarrow{OA_i}$$

et M est donc un barycentre de $k-1$ points affectés de coefficients posi

□

- **Polynômes réciproques**
  Soit P un polynôme de la variable X, à coefficients réels ou complexes de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + +a_1 X + a_0$$

  Le polynôme réciproque de P, noté Q, s'obtient en remplaçant les a_k par les a_{n-k} pour tout $k = 0, 1, ..., n$:

$$Q(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + ... + +a_{n-1} X + a_n$$

  On déduit immédiatement que :

$$Q(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \quad \text{et} \quad P(X) = X^n Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

  De plus, si $\alpha \neq 0$ est une racine de P, alors $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de Q (et réciproquement...).
  On dit qu'un polynôme P est *réciproque* si $P = Q$. Ainsi, pour $\alpha \neq 0$, $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.