Principe des zéros isolés

Mohamed NASSIRI

Référence :

Analyse complexe, Martine et Hervé Queffélec - p.102-103

Recasage :

●●●●● 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.
●●●●○ 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
●●●●○ 204 : Connexité. Exemples et applications.
●●●●○ 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
●●●●○ 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
●●●●○ 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
●●●○○ 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Résumé :

Le principe des zéros isolés est un résultat fort de l'analyse complexe qui permet de donner la stucture des zéros d'une fonction holomorphe : ils sont isolés. Plus précisement, soit une fonction analytique $f : \Omega \to \mathbb{C}$ non identiquement nulle (Ω ouvert connexe), alors tous ses zéros sont isolés, c'est-à-dire que si $a \in \Omega$ vérifie $f(a) = 0$, alors il existe un disque centré en a, inclus dans Ω, tel que f ne s'annule en aucun autre point que a sur ce disque.

Prérequis :

Connexité - Compacité - Séries entières - Analycité - Fonctions holomorphes

---

Théorème : Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.
(1) Si $a \in Z(f)$, $\exists\, k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \quad \text{avec } g(a) \neq 0$$

(2) $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω

Démonstration.
(1)
Soient

$$A = \{a \in \Omega \mid f \text{ est nulle au voisinage de } a\}$$
$$B = \{a \in \Omega \mid f^{(n)}(a) = 0,\ \forall n \geq 0\}$$

Comme f est analytique (car holomorphe), localement en a, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

et ceci implique que $A = B$.
Cette égalité va nous permettre de pouvoir utiliser la connexité de Ω. En effet /
- A est ouvert par définition,
- B est fermé comme intersection de fermés

$$B = \{a \in \Omega \mid f^{(n)}(a) = 0,\ \forall n \geq 0\} = \bigcap_{n \geq 0} \underbrace{\{a \in \Omega \mid f^{(n)}(a) = 0\}}_{:=F_n}$$

Les F_n sont bien des fermés comme image réciproque du singleton $\{0\}$ par les applications continues $f^{(n)}$.

Si donc $A \neq \varnothing$, comme il est ouvert et fermé (bah oui, $A = B$ ...) dans Ω qui est connexe, il est égal à Ω et donc f est identiquement nulle ; ce que l'on a exclu. Par conséquent, $A = \varnothing$.
Posons $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. D'après ce qui précède, il existe un premier entier k tel que $c_k \neq 0$ et alors

$$f(z) = \sum_{n \geq k} c_n (z-a)^n \quad \text{pour } |z-a| < r, \text{ avec } r > 0$$

.
Soit

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^k} & \text{si } z \neq a \\ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} & \text{si } z = a \end{cases}$$

g est donc holomorphe dans $\Omega \backslash \{a\}$.
Bon, on perdu le point a dans la bataille ... En effet, d'après l'énoncé, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et non $g \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$ ... C'est dans ce genre de moment que l'on se rend compte du caratère robuste de l'analycité/holomorphie. Pour z voisin de a, on a

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+k}(z-a)^j$$

Ce qui montre que g est analytique, et donc par suite holomorphe, en a (Et voilà le travail !).
De plus, $g(a) = c_k \neq 0$ et $f(z) = (z-a)^k g(z)$. On a donc bien démontré (1).

(2)
Si $a \in Z(f)$, comme g est holomorphe, elle est *a fortiori* continue, et donc :

$$\begin{aligned} & \exists \delta > 0, \text{ tel que, si } |z-a| \leq \delta \Rightarrow |g(a) - g(z)| \leq \frac{|c_k|}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \exists \delta > 0, \text{ tel que, si } |z-a| \leq \delta \Rightarrow |\underbrace{g(a)}_{=c_k}| - |g(z)| \leq \frac{|c_k|}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \exists \delta > 0, \text{ tel que, si } |z-a| \leq \delta \Rightarrow |g(z)| \geq \frac{|c_k|}{2} \end{aligned}$$

et donc $|f(z)| \geq \frac{|c_k|}{2}|z-a|^k$. Le point a est donc bien le seul zéro de f dans $D(a, \delta)$. Ce qui montre bien le caractère isolé des points de $Z(f)$.

Soit (K_n) une suite exhaustive de compacts de Ω.

Rappel : Une suite exhaustive de compacts d'un espace topologique Ω est une suite de compacts $(K_n)_{n\geq 0}$ telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} K_n$.
Exemple : $K_n = BF(0,n)$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (une suite infinie de points d'un compact a au moins un point d'accumulation dans ce compact).
Or chaque $Z(f) \cap K_n$ est fini, et donc $Z(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty}(Z(f) \cap K_n)$ est au plus dénombrable. □

- **Définition :** k est appelé l'ordre du zéro de a.

Quelques conséquences du principe des zéros isolés :

- **Théorème de prolongement des identités :** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω. Alors, $f = g$.
  En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω, elles sont égales.

  Démonstration : Soit $h = f - g$. Cette fonction s'annule sur E ayant un point d'accumulation dans Ω, elle est donc identiquement nulle compte tenu du principe des zéros isolés.
  Et si E est un ouvert non vide de Ω, tous ses points sont d'accumulation dans Ω.

  □

- *Application du théorème de prolongement des identités :* Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, alors

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t = e^{-\xi^2/2}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{1}{2}(t+i\xi)^2}\mathrm{d}t$$

En considérant la fonction :

$$F : z \to e^{z^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2}\mathrm{d}t$$

Montrons que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (on dit aussi que cette fonction est *entière*) en utilisant le théorème d'holomorphie sous signe intégral.
Posons la fonction

$$\begin{aligned} h \ : \ & \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & (t,z) \mapsto e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \end{aligned}$$

- $\forall z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto h(t,z)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$,
- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto h(t,z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$,
- Soit un compact $K \subset \mathbb{C}$ et $z \in K$, on a

$$\begin{aligned} |h(t,z)| = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{R}((t+z)^2)} &= e^{-\frac{1}{2}t^2 - t\mathcal{R}z - \frac{1}{2}\mathcal{R}(z^2)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t^2 + |t||z| + \frac{1}{2}|z|^2} \end{aligned}$$

Or comme $z \in K$, il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que $|z| \leq \alpha$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R} \times K$,

$$|h(t,z)| \leq \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t^2 + |t|a + \frac{1}{2}a^2}}_{:= g_K(t)}$$

avec $g_K \in L^1(\mathbb{R})$
Ainsi par le théorème d'holomorphie sous signe intégral, F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Pour $\underline{z \in \mathbb{R}}$, on a

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \mathrm{d}t \\ &\underset{t+z=s}{=} e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}s^2} \mathrm{d}s \\ &= \sqrt{2\pi} e^{z^2/2} := G(z) \end{aligned}$$

Pour $\underline{z \in \mathbb{R}}$, on a donc $F(z) = G(z)$. Donc les fonctions entières F et G coïncident sur $\mathbb{R}$ dont tous les points sont d'accumulations dans $\mathbb{C}$. Par le théorème de prolongement des identités, $F(z) = G(z)$ pour tout $\underline{z \in \mathbb{C}}$. En particulier,

$$\widehat{f}(\xi) = F(i\xi) = G(i\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$$

- **Théorème :** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $fg = 0$. Alors, $f = 0$ ou $g = 0$. En d'autres termes, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.

  Démonstration : Si f n'est pas identiquement nulle, ω un ouvert non vide Ω sur lequel elle ne s'annule pas. Alors, $g = 0$ sur ω, et par le théorème de prolongement des identités, on a $g = 0$.

  $\square$