Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Mohamed NASSIRI

L'idée des polynômes d'endomorphismes est de transposer des propriétés de l'algèbre (anneau euclidien) $K[X]$ sur l'algèbre $End_K(E)$, grâce au morphisme de K-algèbres suivant :

$$\phi_f \ : \ K[X] \to End_K(E)$$
$$P(X) = \sum_i a_i X^i \mapsto P(f) = \sum_i a_i f^i$$

Une des premières propriétés que l'on utilise est la "principalité" de l'anneau $K[X]$ qui nous l'existence du *polynôme minimal*, $\pi_f(X)$. Un autre polynôme d'endomorphisme intéressant est le *polynôme caractéristique* : pour $f \in End_K(E)$, on le définit comme

$$\chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{id})$$

Le *théorème de Cayley-Hamilton* nous dit que $\chi_f(f) = 0$, et donc que $\pi_f(X) \mid \chi_f(X)$.

Dans le cas où π_f est scindé à racines simples, l'endomorphisme f est diagonalisable. On rappelle par ailleurs plusieurs critères de diagonalisation. De plus, on a un résultat de *diagonalisation simultanée* : soient $f, g \in End_K(E)$ diagonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g.

La décomposition de Dunford de n'importe quelle matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $M = D + N$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente (vérifiant en outre $DN = ND$), nous montre que l'étude des endomorphismes diagonalisables n'est pas superflue. diago autoad et norm

Dans le cas où π_f est juste scindé, l'endomorphisme f est trigonalisable. On rappelle également plusieurs critères de trigonalisation. De plus, comme pour la diagonalisation, on a un résultat de *trigonalisation simultanée* : soient $f, g \in End_K(E)$ trigonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base commune de trigonalisation de f et g.

On donne une application intéressante aux équations différentielles. A partir d'une équation différentielle

$$y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + ... + a_p y = 0 \qquad (E)$$

On considère le polynôme, dit *polynôme caractéristique*, $P(X) = X^p + a_1(t)X^{p-1} + ... + a_p X = \prod_{i=1}^k (X - r_i)^{m_i}$. Alors, on peut montrer que les solutions de (E) sont les applications

$$t \mapsto \sum_{i=1}^k e^{r_i t} P_i(t) \qquad \text{avec } \deg P_i < m_i$$

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone

[GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon

[AUL] Mathématiques : Algèbre et géométrie, Guy Auliac, Jean Delcourt et Rémi Goblot

[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ e^M est diagonalisable

Théorème des polynômes annulateurs et Décomposition de Dunford

Convergence des méthodes itératives

1 Polynôme d'endomorphisme

1.1 Eléments propres [GRI] p.155-156, 163-164

Définition 1 *Soit $f \in End_K(E)$. Un vecteur $v \in E \backslash \{0\}$ est dit vecteur propre de f s'il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$.*
Le scalaire λ est dit valeur propre correspondante à v.

Exemple 2 *Soit $k \in K$, et h_k l'homothétie de rapport k. Tout vecteur non nul de E est vecteur propre correspondant à la valeur propre k.*

Exemple 3 *Soit $r_{0,\theta}$ la rotation de centre 0 et d'angle $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans ce cas, il n'y a pas de vecteurs propres et donc pas de valeurs propres.*

Définition 4 *Soit $\lambda \in K$. On note*

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E dit espace vectoriel correspondant à λ.

Proposition 5 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts. Alors les espaces $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.*

1.2 Polynôme d'endomorphisme, polynôme minimal [AUL] p.86

Proposition-Définition 6 *Soit $f \in End_K(E)$. L'application*

$$\begin{aligned} \phi_f \ : \ K[X] &\to End_K(E) \\ P(X) = \sum_i a_i X^i &\mapsto P(f) = \sum_i a_i f^i \end{aligned}$$

est un morphisme de K-algèbres.
Le générateur unitaire de son noyau s'appelle polynôme minimal de f, et on le note $\pi_f(X)$.

Définition 7 *Soit $f \in End_K(E)$. Un polynôme $Q(X) \in K[X]$ est dit annulateur de f si $Q(f) = 0$.*

Théorème 8 *Toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur.*

Proposition 9 *Lemme des noyaux*
Soit $f \in End_K(E)$ et $Q(X) = Q_1(X)...Q_p(X)$ un polynôme factorisé en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux.
Si $Q(f) = 0$, alors

$$E = \mathrm{Ker} Q_1(f) \oplus ... \oplus \mathrm{Ker} Q_p(f)$$

[GRI] p.179-180

1.3 Polynôme caractéristique [GRI] p.157-158, 176 → 178

Définition 10 *Soit $f \in End_K(E)$. On appelle polynôme caractéristique de f, le polynôme*

$$\chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{id})$$

Exemple 11 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, l'endomorphisme qui, dans la base canonique, est représenté par la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{id}) &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (X-2)(X-3) \end{aligned}$$

Théorème 12 *Théorème de Cayley-Hamilton*
Soit $f \in End_K(E)$. Alors $\chi_f(f) = 0$.

Corollaire 13 *Soit $f \in End_K(E)$. Alors $\pi_f(X)$ divise $\chi_f(X)$.*

2 Cas où π_f est scindé à racines simples : diagonalisation

3 Diagonalisation

3.1 Critère de diagonalisation [GRI] p.153 → 183

Définition 14 *On dira que $f \in End_K(E)$ est diagonalisable s'il existe une base (e_i) telle que*

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 15 (I) *$f \in End_K(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.*

Théorème 16 (II) *Soient $f \in End_K(E)$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est diagonalisable.
(ii) $E = E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$.
(iii) $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + ... + \dim E_{\lambda_p}$

Corollaire 17 *Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.*

Proposition 18 *Soient $f \in End_K(E)$ et λ une valeur propre d'ordre α de f. Alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$*

Théorème 19 (III) *Soit $f \in End_K(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si :*
(i) $\chi_f(X)$ est scindé dans K (i.e.)

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} ... (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$, et $\alpha_1 + ... + \alpha_p = n$
(ii) Les dimensions des espaces propres sont maximales (i.e.) $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\dim E_{\lambda_i} \leq \alpha_i$

Exemple 20 • $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*
• $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*
• $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*

Proposition 21 *Soient $f \in End_K(E)$ et $\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} ... (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ son polynôme caractéristique. Alors, si f est diagonalisable, $Q(X) = (X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)$ annule f.*

Théorème 22 (IV) *$f \in End_K(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de f, scindé et n'ayant que des racines simples.*

Théorème 23 (V) *$f \in End_K(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et à racines simples.*

Exemple 24 • $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*
• $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*

3.2 Diagonalisation simultanée [GOUal] p.166 → 173

Proposition 25 *Soient $f, g \in End_K(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors*
(i) Tout sous-espace propre de f est stable par g (en particulier Ker*f).*
(ii) Im*f est stable par g.*

Théorème 26 *Diagonalisation simultanée*
Soient $f, g \in End_K(E)$ diagonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g.
On dit alors que f et g sont codiagonalisables.

Corollaire 27 *Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables et commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de diagonalisation à tous les f_i.*

Application 28 *Lemme de Schur*
Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie. Soit $Q \subset End_{\mathbb{C}}(E)$ irréductible (c'est-à-dire que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E). Alors les seuls éléments commutant avec tous les éléments de Q sont les homothéties.

Remarque 29 *Si E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, le résultat est faux !*
Cependant, si dim*E est impair, le résultat reste vrai.*

3.3 Décomposition de Dunford [GOUal] p.192-193

Théorème 30 ♠ *Théorème des polynômes annulateurs* ♠
Soit $f \in L(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F(f) = 0$. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} ... M_s^{\alpha_s}$ la décomposition de Dunford en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = Ker M_i^{\alpha_i}(f)$. On a alors $E = N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Théorème 31 ♠ *Décomposition de Dunford* ♠
Soit $f \in L(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que :
(i) d est diagonalisable, n est nilpotente.
(ii) $f = n + d$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

Proposition 32 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que son polynôme minimal π_A soit scindé et $A = D + N$ la décomposition de Duford dans $\mathbb{C}$ de A. On considère l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_A := [A, .] : \ & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M \mapsto AM - MA \end{aligned}$$

(i) Alors $\varphi_A = \varphi_D + \varphi_N$ est la décomposition de Duford de φ_A.
(ii) (A est diagonalisable) ⇔ (φ_A est diagonalisable).

3.4 Endomorphismes autoadjoints et normaux [GRI] p.252 → 254, p.286-287

Définition 33 *Un endomorphisme f d'un espace euclidien est dit autoadjoint si*

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$$

En d'autres termes, f est autoadjoint si $f^* = f$.
Matriciellement, f est autoadjoint si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthonormée est symétrique.

Théorème 34 *Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Alors :*
(i) f est diagonalisable.
(ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire 35 *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A' = {}^t PAP$ soit diagonale.*

Remarque 36 *Les matrices symétriques complexes (non réelles) ne sont pas nécessairement diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$). Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.*

Définition 37 *Un endomorphisme f d'un espace hermitien est dit normal si*

$$f^* \circ f = f \circ f^*$$

Matriciellement, f est normal si et seulement si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui le représente dans une base orthonormée est normale (${}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A}$).

Exemple 38 *En particulier sont normales, les matrices (anti)symétriques réelles, hermitiennes, orthogonales et unitaires.*

Théorème 39 *Soit f un endomorphisme normal d'un espace hermitien. Alors :*
(i) f est diagonalisable.
(ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire 40 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ normale. Il existe alors $U \in U_n$ telle que la matrice $A' = {}^t\overline{U}AU$ soit diagonale (non nécessairement réelle).*

4 Cas où π_f est scindé : trigonalisation

4.1 Définition et caractérisations [GRI] p.153 → 174

Définition 41 *On dira que $f \in End_K(E)$ est trigonalisable s'il existe une base (e_i) telle que*

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 42 *$f \in End_K(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (i.e.)*

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$, et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$

Corollaire 43 *Tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Exemple 44 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *est semblable à* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Corollaire 45 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\mathrm{Sp}A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. On a alors*

$$\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + \dots + \lambda_p$$
$$\det A = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_p$$

4.2 Trigonalisation simultanée [GOUal] p.166 → 173

Proposition 46 *Soient $f, g \in End_K(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors*
(i) Tout sous-espace propre de f est stable par g (en particulier $\mathrm{Ker}f$).
(ii) $\mathrm{Im}f$ est stable par g.

Théorème 47 *Trigonalisation simultanée*
Soient $f, g \in End_K(E)$ trigonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base commune de trigonalisation de f et g.
On dit alors que f et g sont cotrigonalisables.

Corollaire 48 *Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables et commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de trigonalisation à tous les f_i.*

5 Application aux équations différentielles

Théorème 49 *Soit*

$$y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \dots + a_p y = 0 \qquad (E)$$

une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p sur $\mathbb{R}$. En considérant le polynôme $P(X) = X^p + a_1(t)X^{p-1} + \dots + a_p X$ (appelé polynôme caractéristique) que l'on factorise sous la forme $P(X) = \prod_{i=1}^k (X - r_i)^{m_i}$. Les solutions de (E) sont les applications

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t)$$

avec $\deg P_i < m_i$.

Théorème 50 *Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{C}^n$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f. Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, on note N_i le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i et on note $\alpha_i := \dim N_i$. Ainsi, on a*

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Pour tout s.e.v. N de $\mathbb{C}^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $\mathcal{S}_{N,\alpha,\lambda}$ l'e.v. des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{\lambda t} P(t)$; où P est un polynôme à coefficients dans N de degré strictement inférieur à α. Si on note $\mathcal{S}$ l'e.v. des solutions de l'équation différentielle $X' = f(X)$. Alors

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{N_1,\alpha_1,\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{S}_{N_k,\alpha_k,\lambda_k}$$

Questions

Exercice : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal. Si f est inversible, montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

Solution : On va utiliser l'égalité de Bézout en montrant que $X \nmid \pi_f$. Montrons donc que $X \nmid \pi_f$.
En effet, s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_f = XP$, alors $0 = \pi_f(f) = f \circ P(f)$, et comme f est inversible, on en déduit donc que $P(f) = 0$. Ce qui contredit le fait que π_f est le polynôme minimal de f puisque $\deg P < \deg \pi_f$.
Donc $X \nmid \pi_f$. Comme X est irréductible, X et π_f sont premiers entre eux et donc d'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$UX + V\pi_f = 1 \quad \Rightarrow \quad U(f) \circ f + V(f) \circ \pi_f(f) = Id_E$$

D'où $U(f) \circ f = Id_E$, et donc $f^{-1} = U(f)$. D'où le résultat.

Exercice : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif fini à q éléments, E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable dans E si et seulement si $f^q = f$.

Solution : Montrons le résultat intermédiaire suivant :

$$X^q - X = \prod_{\alpha \in \mathbb{K}} (X - \alpha)$$

Muni de la loi produit, $\mathbb{K}^*$ est un groupe multiplicatif à $q-1$ éléments, donc pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $x^{q-1} = 1$, d'où pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x^q = x$. On a ainsi déterminé q racines distinctes du polynôme $X^q - X$ qui est de degré q, d'où le résultat.

On sait que f est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé sur $\mathbb{K}$, à racines toutes simples, tel que $P(f) = 0$, autrement dit si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P \mid \prod_{\alpha \in \mathbb{K}} (X - \alpha) = X^q - X \quad \text{avec } P(f) = 0$$

Donc, f est diagonalisable si et seulement si $f^q - f = 0$.

Exercice : Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour que la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ soit diagonalisable.

Solution : Soit F le s.e.v. de $\mathbb{K}^{2n}$ engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^{2n}$. F est stable par B.
Remarquons que si B est diagonalisable, alors sa restriction à F, qui est A, est diagonalisable.
Puis, si B est diagonalisable, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé sur $\mathbb{K}$, dont toutes les racines sont simples tel que $P(B) = 0$.
Or, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on montre facilement que

$$B^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0 & kA^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Par suite, on en déduit que

$$0 = P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & AP'(A) \end{pmatrix}$$

Donc, on a $P(A) = AP'(A) = 0$. Comme $P(A) = 0$, on retrouve le fait que A est diagonalisable.
Soit λ une valeur propre de A. Comme $AP'(A) = 0$, on a donc $\lambda P'(\lambda) = 0$. Mais λ étant une racine simple de P, on a $P'(\lambda) \neq 0$, donc $\lambda = 0$.
Par conséquent, A est diagonalisable et $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de A (*i.e.*) $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, B est (trivialement) diagonalisable. Donc B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.