$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Mohamed NASSIRI

Références :

Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière- p.140 → 143

Recasage :

• • • • • 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
• • • • • 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
• • • • • 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
• • • • • 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Résumé :

L'intégrale de Dirichlet fait partie des exemples à connaître de fonctions qui ne sont pas intégrables mais dont l'intégrale est convergente.

Prérequis :

Théorèmes de continuité et dérivabilité sous signe intégral - Notation de Landau

---

Théorème :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Dans cette démonstration, on va utiliser les théorèmes de continuité et dérivabilité sous signe intégral de manière abondantes.
On pose

$$\begin{aligned} f\ :\ &\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ &(x,t)\mapsto e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}\end{aligned}$$

et

$$F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $x>0$, $f(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est prolongeable par continuité en 0 par $f(x,0)=1$ (car $\lim\limits_{t\to 0}\frac{sin(t)}{t}=1$) et que pour t tendant vers $+\infty$, on remarque que $f(x,t)=O(1/t^2)$ (car, à x fixé,

$|t^2 e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}| \leq te^{-xt} \to 0)$.

Montrons que F est bien définie en 0 :

Par intégrations par parties, on a, $\forall X \leq 1$:

$$\int_1^X \frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (car c'est un $O(1/t^2)$ en $+\infty$). Par suite, quand $X \to +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Donc F est définie en 0.

Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$:

f est de classe $C^{+\infty}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -te^{-xt}sin(t), \quad \forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

Soit $a > 0$, et $\forall x \geq a$, on a $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq e^{-at}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par le théorème de continuité et dérivabilité sous signe intégrale, on a donc que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}sin(t)\,\mathrm{d}t = -Im\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,\mathrm{d}t\right) = -Im\left(\frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $F(x) = C - arctan(x)$, et comme :

$$|F(x)| \underbrace{\leq}_{\frac{sin(t)}{t} \leq 1} \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit donc que $C = \frac{\pi}{2}$ et par suite, $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - arctan(x)$.

Montrons que $F(0) = \frac{\pi}{2}$ i.e. F est continue en 0 :

Ici, on pourrait être tenté d'appliquer le théorème de convergence dominée, mais ce sera voué à l'échec car la fonction $t \mapsto \frac{sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable ... Mais nous n'avons pas dit notre dernier mot !
On décompose le problème (ou plutôt l'intégralee) en deux morceaux :

$$F_1(x) := \int_0^1 e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad F_2(x) := \int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Pour F_1, c'est assez simple :
F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car on a $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| = e^{-xt}|sin(t)| \leq 1$ (et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$...).
Passons à F_2 dont on a juste besoin de savoir si elle est continue. On va étudier la fonction

$$G(x) := \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

dont F_2 est la partie imaginaire.
$\forall X \geq 1$, par intégration par parties, on a :

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i-x}\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^X + \frac{1}{i-x}\int_1^X \frac{-e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, donc on en déduit que :

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or la fonction $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [1,+\infty[\to \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue et dominée par la fontion intégrable $t \to \frac{1}{t^2}$. Donc G est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc F_2 aussi, et donc F également. Ouf !

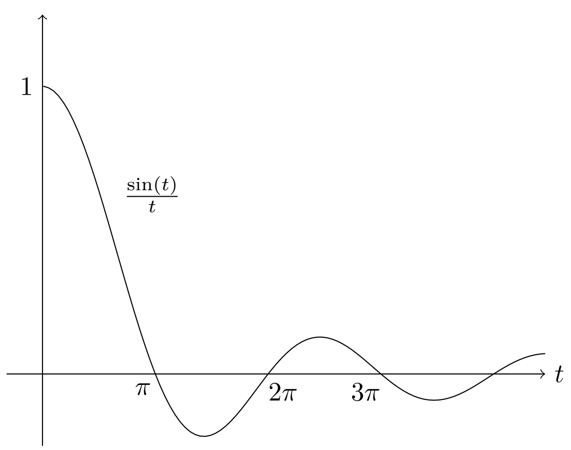
Conclusion : $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ $\square$

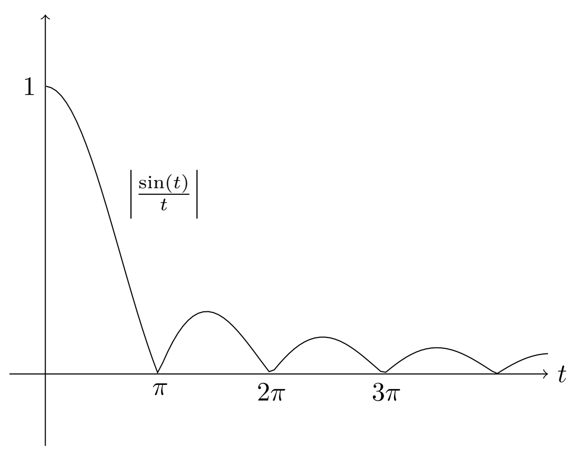
Remarques :

- En faisant ce développement, il faut savoir démontrer que $t \mapsto \frac{sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable ! Pour voir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|sin(t)|}{t}dt$ est divergente, on écrit, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{N\pi} \frac{|sin(t)|}{t}\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \\
&\underset{\substack{t=x+k\pi \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|sin(x)|}{x+k\pi}\mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|sin(x)|}{\pi+k\pi}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1}\int_0^{\pi} |sin(x)|\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

La différence entre les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{|sin(t)|}{t}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$ est que dans le second cas, il y a yn changement de signe du sinus qui entraîne une compensation ... Chose que l'on perd dans la première intégrale.





- **Transformée de Laplace**
  Quand on a posé, au début de la démonstration,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

  il faut savoir, pour la culture, que l'on a posé la *transformée de Laplace* de la fonction $t \to \frac{sin(t)}{t}$.

- Il y a, malheureusement, une démonstration plus rapide ...
  En remarquant que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}y$$

  On en déduit que pour tout $a \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{sin}x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{sin}x\mathrm{d}x$$

  Pour $a > 0$ fixé, on pose pour tout $(x, y) \in]0, a[\times]0, +\infty[$, $f(x, y) = e^{-xy}\mathrm{sin}x$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^a |f(x, y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \leq \int_0^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-xy}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ay}}{y}\mathrm{d}y$$

  Or, la fonction $y \mapsto g(y) = \frac{1-e^{-ay}}{y}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car g est prolongeable par continuité en 0 et $\lim\limits_{y\to+\infty} y^2 g(y) = 0$. Donc f est intégrable sur $]0, a[\times]0, +\infty[$.
  Ainsi par le théorème de Fubini, on a

$$\int_0^a \frac{\mathrm{sin}x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-xy}\mathrm{sin}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

  Par ailleurs,

$$\int_0^a e^{-xy}\mathrm{sin}x\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^a e^{-xy}e^{ix}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-ay}}{1+y^2}(\mathrm{cos}a + y\mathrm{sin}a)$$

  Par suite,

$$\int_0^a e^{-xy}\mathrm{sin}x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ay}}{1+y^2}(\mathrm{cos}a + y\mathrm{sin}a)\mathrm{d}y$$

  Or, pour tout $y \in [0, +\infty[$, la fonction $y \mapsto f_a(y) = \frac{e^{-ay}}{1+y^2}(\mathrm{cos}a+y\mathrm{sin}a)$ vérifie $\lim\limits_{a\to+\infty} f_a(y) = 0$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $|f_a(y)| \leq e^{-\alpha y}$ donc le théorème de convergence dominée entraîne $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_a(y)\mathrm{d}y = 0$ et donc

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{\mathrm{sin}x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$