Distances et isométries d'un espace affine euclidien

Mohamed NASSIRI

Nous savons déjà que les applications linéaires et affines ont des propriétés remarquables. On va s'intéresser à une classe d'applications linéaires : les isométries (elles conservent les distances).

Attention cependant à la nuance entre isométries vectorielles et affines. Par exemple, une rotation est une isométrie vectorielle et (donc) affine, cependant une translation est une isométrie affine mais pas vectorielle. Tout provient de la nuance dans la définition :

Une isométrie affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ est une application f de $\mathcal{E}$ dans lui-même conservant les distances (i.e.)

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}, \quad \mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M,N)$$

Une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel E est une application f de E dans lui-même conservant la norme (i.e.)

$$\forall x \in E, \quad ||f(x)|| = ||x||$$

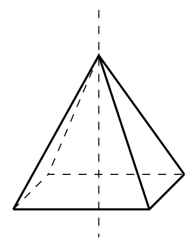
La différence entre les deux définitions provient notamment du fait que dans un espace vectoriel on a privilégié un point et pas dans l'espace affine.

L'étude des isométries affines va nous être simplifiée par un résultat de décomposition canonique de celles-ci. Plus précisement, pour toute isométrie f de $\mathcal{E}$, il existe un unique couple $(t_{\overrightarrow{u}}, f_0)$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et f_0 est une isométrie ayant un point fixe vérifiant

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ f_0 = f_0 \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

Ce résultat va nous permettre aussi de classifier les isométries en dimension 2 et 3.

D'autres isométries sont particulièrement intéressantes : celles qui préservent une partie. Par exemple, en considérant une pyramide $\mathcal{S}$ dont la base est un polygone régulier à n côtés (ici $n = 4$), les rotations d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe "hauteur" laissent invariant $\mathcal{S}$.



Ces isométries qui préservent une partie vont nous permettent de définir le groupe diédral (groupe des isométries du plan qui conservent un polygone régulier à n côtés), mais également nous donner des isomorphismes intéressants. Par exemple, en notant Δ_4 le tétraèdre régulier et $Is(\Delta_4)$ le groupe des isométries préservant Δ_4. On a alors l'isomorphisme

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

Cet isomorphisme nous permet notamment de remplir la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[MER] Cours de géométrie, Dany-Jack Mercier
[OTZ] Exercices d'algèbre, Pascal Ortiz
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et les isométries du tétraèdre
Décomposition canonique d'une isométrie

Dans toute la leçon, $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension n.

0 Rappels [ML3al] p.386

Rappel 1 *La composée $g \circ f$ de deux applications affines g et f de $\mathcal{E}$ est une application affine de $\mathcal{E}$ de partie linéaire $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.*

Rappel 2 *Une application affine f de $\mathcal{E}$ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ l'est. Dans ce cas, l'application f^{-1} est affine et sa partie linéaire vérifie $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$*

1 Aspects métriques

1.1 Définition et premiers calculs de distance [MER] p.141-142, p.398 $\to$ 403

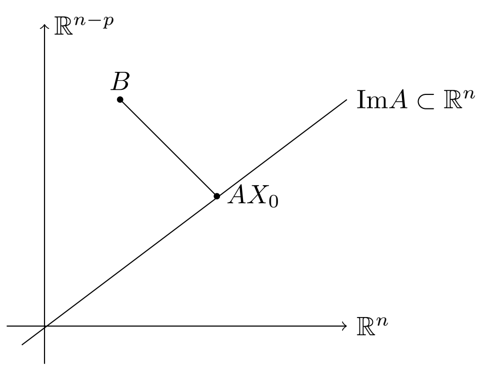
Remarque 3 *Toutes les notions vectorielles sont adaptées au cas affine.*

Définition 4 *Soient $A, B \in \mathcal{E}$, on définit la <u>distance entre A et B</u> comme* $\mathrm{d}(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$

Définition 5 *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine $\mathcal{E}$. La distance de M à $\mathcal{F}$ est définie comme*

$$\mathrm{d}(P, \mathcal{F}) = \min_{P \in \mathcal{F}} ||\overrightarrow{MP}||$$

Application 6 <u>*Minimisation de $||AX - B||^2$:*</u>
Soient A une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, X un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ et B un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$
1) Le minimum de $||AX - B||^2$ pour X décrivant $\mathbb{R}^p$ est atteint en un point X_0 qui vérifie $Ax_0 = p(B)$, où p désigne la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Im}A$.
2) Si $\mathrm{rg}A = p$, alors X_0 est unique et vérifie ${}^tAAX_0 = {}^tAB$



Théorème 7 *Soit D une droite de l'espace euclidien orienté de dimension 3 passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. La distance d'un point M à D est*

$$\mathrm{d}(M, D) = \frac{|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{u}|}{||\overrightarrow{u}||}$$

Théorème 8 *Soit P un plan de l'espace euclidien orienté de dimension 3 passant par A et de direction* $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. *La distance d'un point M à P est*

$$\mathrm{d}(M, P) = \frac{|\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})|}{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||}$$

Théorème 9 *Soient D et D' deux droites non coplanaires de l'espace euclidien orienté de dimension 3 respectivement de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$) et avec $(A, A') \in D \times D'$. La distance entre la droite D et D' est*

$$\mathrm{d}(D, D') = \frac{|\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'})|}{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}||}$$

1.2 Matrices de Gram [GRI] p.258 & p.266

Définition 10 *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille ordonnée de vecteurs de E. On appelle <u>matrice de Gram</u> associé la famille $(v_1, ..., v_p)$, la matrice*

$$\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_p) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \dots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix}$$

On note $G(v_1, ..., v_p) = \det(\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_p))$.

Théorème 11 *Soient $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre de E, $F = \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_p\}$ et $x \in E$. Alors,*

$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, ..., v_p)}{G(v_1, ..., v_p)}$$

2 Le groupe des isométries

2.1 Définition et caratère affine [ML3al] p.389 $\to$ 391

Définition 12 *Une <u>isométrie</u> de $\mathcal{E}$ est une application f de $\mathcal{E}$ dans lui-même conservant les distances (i.e.)*

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}, \quad \mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M, N)$$

Exemple 13 *Les translations sont des isométries.*

Proposition 14 *Les isométries de $\mathcal{E}$ sont les applications affines dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal.*

Remarque 15 *Les isométries sont aussi appelées <u>isométries affines</u> par opposition aux autormorphismes orthogonaux qui sont appelés aussi <u>isométries vectorielles</u>.*

Corollaire 16 *(i) L'ensemble $Is(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de du groupe affine de $\mathcal{E}$.*
(ii) L'application

$$\Phi' \; : \; Is(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}^*$$
$$f \mapsto \det(\overrightarrow{f})$$

est un morphisme de groupes d'image $\{\pm 1\}$

Exemple 17 *Les symétries affines orthogonales sont des isométries : ce sont des applications affines dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal.*

2.2 Déplacements et antidéplacements [ML3al] p.391-392

Définition 18 *On appelle déplacement de $\mathcal{E}$ une isométrie dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal de déterminant +1 ((i.e.) dont la partie linéaire est une rotation vectorielle) et un antidéplacement de $\mathcal{E}$ une isométrie dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal de déterminant -1.*
On note $Is^+(\mathcal{E})$ et $Is^-(\mathcal{E})$ respectivement l'ensemble des déplacements et antidéplacements de $\mathcal{E}$.

Proposition 19 *$Is^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué de $Is(\mathcal{E})$.*

Définition 20 *Les déplacements de $\mathcal{E}$ ayant un point fixes sont appelés rotations affines de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.*

Proposition 21 *Soit s une symétrie orthogonale par rapport au sous-espace affine $\mathcal{V}$. Alors :*
(i) La partie linéaire de s est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$, donc de déterminant $(-1)^{\dim \mathcal{V}^\perp}$.
(ii) La symétrie orthogonale s est un déplacement si et seulement si $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de codimension paire ((i.e.) $\dim\mathcal{E} - \dim\mathcal{V}$ est pair).

Définition 22 *Une réflexion affine est une symétrie orthogonale par rapporrt à un hyperplan.*

2.3 Décomposition [ML3al] p.393 → 395

Proposition 23 *Adjonction de points fixes*
Si $f \in Is(\mathcal{E})\backslash\{Id\}$, alors il existe une réflexion s telle que l'ensemble des point fixes de $s \circ f$ contienne strictement l'ensemble des points fixes de f.

Théorème 24 *Toute isométrie d'un espace affine euclidien de dimension n est la composée d'au plus $n+1$ réflexions.*

Proposition 25 *Si φ est un automorphisme orthogonal de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, alors $\ker(\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$ et $\mathrm{im}(\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$ sont des supplémentaires orthogonaux de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ stables par φ.*

Théorème 26 ♠ *Décomposition canonique d'une isométrie* ♠
Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Il existe un unique couple $(t_{\overrightarrow{u}}, f_0)$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et f_0 est une isométrie ayant un point fixe vérifiant

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ f_0 = f_0 \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

De plus, dans ce cas, $\overrightarrow{u} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}})$

3 Classification en dimension 2 et 3

3.1 En dimension 2 [ML3al] p.396

Voir Tableau 1

3.2 En dimension 3 [ML3al] p.401

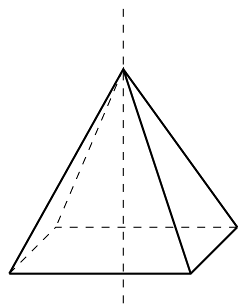
Voir Tableau 2

4 Isométries préservant une partie

4.1 Généralités [GRI] p.401

Définition 27 *Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. On dit qu'une isométrie f laisse $\mathcal{S}$ invariant si $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.*

Exemple 28 *Si $\mathcal{S}$ est une pyramide dont la base est un polygone régulier à n côtés (ici $n = 4$), les rotations d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe "hauteur" laissent invariant $\mathcal{S}$.*



Proposition 29 *L'ensemble $Is(\mathcal{S})$ des isométries qui laissent $\mathcal{S}$ invariant est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$ dit groupe (complet) des symétries de $\mathcal{S}$.*

4.2 Le groupe diédral [MER] p.304 $\rightarrow$ 311

Définition 30 *On appelle* <u>*groupe diédral D_n*</u> *le groupe des isométries du plan qui conservent un polygone régulier P_n à n côtés.*

Théorème 31 *Le groupe diédral D_n est un groupe fini d'ordre $2n$ engendré par un élément r d'ordre n et un élément s d'ordre 2.*
Il contient n rotations d'angle $\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, ..., n-1$ ainsi que n symétries. En notant r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s une des symétries, on a

$$r^n = 1 \qquad s^2 = 1 \qquad (sr)^2 = 1$$

Exemple 32 *Le groupe du triangle équilatéral est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3$ des permutations d'un ensemble de trois éléments. On peut donc écrire*

$$D_3 \approx \mathfrak{S}_3$$

Remarque 33 *On peut identifier les isométries de* $\mathrm{Is}(P_n)$ *à leurs parties linéaires et aux matrices de ces parties linéaires dans une base orthonormale directe. On a donc*

$$\mathrm{Is}^+(P_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \ ; \ k = 0, ..., n-1 \right\}$$

$$\mathrm{Is}^-(P_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ \sin k\theta & -\cos k\theta \end{pmatrix} \ ; \ k = 0, ..., n-1 \right\}$$

Proposition 34 *Les classes de conjugaison du groupe diédral D_n sont :*
- <u>*Pour n est pair :*</u> *on a $\frac{n}{2}+3$ classes de conjugaison*

$$\{Id\}, \{-Id\}, \{r, r^{n-1}\}, ..., \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}$$

$$\{s, sr^2, ..., sr^{n-2}\}, ..., \{sr, sr^3, ..., s^{n-1}\}$$

- <u>*Pour n est impair :*</u> *on a $\frac{n+1}{2}+1$ classes de conjugaison*

$$\{Id\}, \{r, r^{n-1}\}, ..., \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n+1}{2}}\}$$

$$\{s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$$

[OTZ] p.17

4.3 Isométries du tétraèdre

Théorème 35 ♠ *Soient Δ_4 le tétraèdre régulier et $Is(\Delta_4)$ le groupe des isométries préservant Δ_4. Alors*

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est voir Tableau 3 ♠

Illustrations

f	$\overrightarrow{f}$	Points fixes	$Is^{\pm}(\mathcal{E})$?
translation $t_{\overrightarrow{u}}$	$\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$	$\mathcal{E}$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ $\varnothing$ si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
rotation affine non triviale	rotation vectorielle ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$)	un point	$Is^{+}(\mathcal{E})$
réflexion	réflexion vectorielle	une droite	$Is^{-}(\mathcal{E})$
symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$	réflexion vectorielle	aucun	$Is^{-}(\mathcal{E})$

Tableau 1 : Classification des isométries planes

f	$\overrightarrow{f}$	Points fixes	$Is^{\pm}(\mathcal{E})$?
translation $t_{\overrightarrow{u}}$	$\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$	$\mathcal{E}$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ $\varnothing$ si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
rotation affine non triviale $r(\mathcal{D},\theta),\ \theta \neq 0 \pmod{2\pi}$)	rotation vectorielle $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta)$	la droite $\mathcal{D}$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
vissage $t_{\overrightarrow{u}} \circ r(\mathcal{D},\theta) = r(\mathcal{D},\theta) \circ t_{\overrightarrow{u}}$ $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$	rotation vectorielle $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta)$	$\varnothing$	$Is^{+}(\mathcal{E})$
réflexion $s_{\mathcal{P}}$	réflexion vectorielle $\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$	le plan $\mathcal{P}$	$Is^{-}(\mathcal{E})$
symétrie glissée $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{P}} = s_{\mathcal{P}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$ $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$	réflexion vectorielle $\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$	$\varnothing$	$Is^{-}(\mathcal{E})$
antirotation $s_{\mathcal{P}} \circ r(\mathcal{D},\theta) = r(\mathcal{D},\theta) \circ s_{\mathcal{P}}$ $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$	$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \circ \overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta)$ $= \overrightarrow{r}(\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta) \circ \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$	$\{\mathcal{P} \cap \mathcal{D}\}$	$Is^{-}(\mathcal{E})$

Tableau 2 : Classification des isométries de l'espace

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0

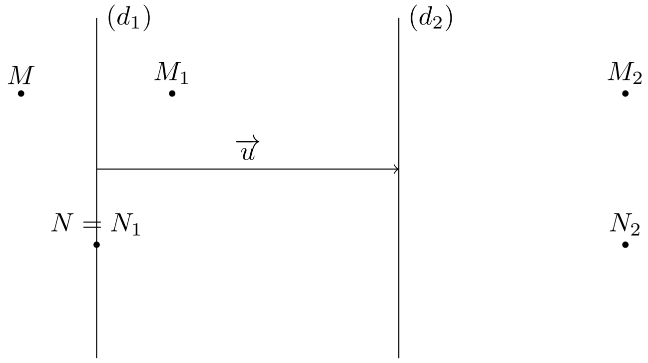
Tableau 3 : La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

Questions

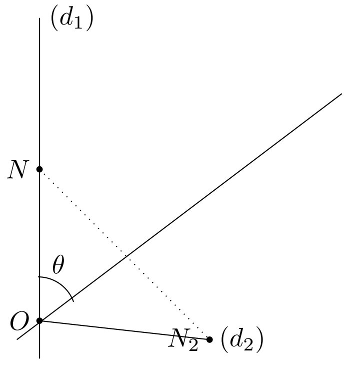
Exercice : Soient (d_1) et (d_2) deux droites du plan, et notons s_1 et s_2 respectivement la symétrie orthogonale d'axe (d_1) et (d_2). Que peut-on dire de $s_2 \circ s_1$?

Solution : On sait que $s_i \in Is^-(\mathcal{E})$ pour $i = 1, 2$, donc $\det(\overrightarrow{s_2} \circ \overrightarrow{s_1}) = (-1) \times (-1) = 1$. Donc, d'après la classification des isométries planes, $s_2 \circ s_1$ est soit une translation, soit une rotation. Il y a deux cas de figure à considérer distingués de la sorte :

<u>$s_2 \circ s_1$ est une translation (*i.e.*) $(d_1) \parallel (d_2)$:</u> Dans ce cas, considérons un point M du plan, son image par s_1 est M_1, puis l'image de M_1 par s_2 est M_2. Pour trouver le vecteur de translation, le plus simple est de choisir un point invariant pour la première symétrie orthogonale. Soit donc $N \in (d_1)$, on a $s_1(N) = N$ et $s_2(N) = N_2$. Ainsi, le vecteur de translation est égal à $\overrightarrow{Ns_2(N)} = 2\overrightarrow{u}$, où $||\overrightarrow{u}|| = \mathrm{d}(d_1, d_2)$.



<u>$s_2 \circ s_1$ est une rotation (*i.e.*) $(d_1) \not\parallel (d_2)$:</u> On reprend les notations précédentes. Soit $O = (d_1) \cap (d_2)$, on a donc $s_2 \circ s_1(O) = s_2(O) = O$. Par conséquent, O est le centre de la rotation $s_2 \circ s_1$. Pour trouver l'angle de la rotation, comme précédemment, le plus simple est de choisir un point invariant pour la première symétrie orthogonale. Soit donc $N \in (d_1)$, on a $s_1(N) = N$ et $s_2(N) = N_2$. Ainsi, l'angle de rotation est 2θ, où θ est l'angle formé par les droites (d_1) et (d_2).



Exercice : Etant donnés des points $A_1, ..., A_n$ n points du plan, à quelle(s) condition(s) existe-t-il des points $M_1, ..., M_n$ tels que

$$\begin{cases} A_i \text{ soit le milieu de } [M_i, M_{i+i}] & \text{pour } 1 \leq i < n \\ A_n \text{ soit le milieu de } [M_n, M_1] \end{cases}$$

Solution : On peut proposer deux méthodes pour répondre à cette question.

<u>*Méthode 1* :</u> On va procéder par analyse-synthèse. Supposons que les points $M_1, ..., M_n$ existent, on a donc, en notant s_A la symétrie centrale de centre A,

$$\begin{cases} A_1 \text{ est le milieu de } [M_1, M_2] & \Leftrightarrow \; s_{A_1}(M_1) = M_2 \\ A_2 \text{ est le milieu de } [M_2, M_3] & \Leftrightarrow \; s_{A_2}(M_2) = M_3 \\ & \vdots \\ A_n \text{ est le milieu de } [M_n, M_1] & \Leftrightarrow \; s_{A_n}(M_n) = M_1 \end{cases}$$

Donc si les points $M_1, ..., M_n$ existent, on a alors

$$\underbrace{s_{A_n} \circ ... \circ s_{A_2} \circ s_{A_1}}_{:=f}(M_1) = M_1$$

On remarque que f est une isométrie du plan (comme une composée d'isométries) et on a de plus $\overrightarrow{f} = (-1)^n \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$ car $\overrightarrow{s_A} = -\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$. Distinguons deux cas.

- <u>Pour n est impair :</u> on a donc $\overrightarrow{f} = -\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$, et ainsi f est une symétrie centrale avec un unique point fixe M_1.

- <u>Pour n est pair :</u> on a donc $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$, et ainsi f est une translation.
-Si $f \neq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, alors il n'y a pas de solution car aucun point n'est fixe par une translation non triviale.
-Si $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, alors pour tout point M_1, on a une solution. Mais quand a-t-on $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$?
Comme n est pair, on peut regrouper

$$s_{A_n} \circ s_{A_{n-1}} \circ ... \circ s_{A_2} \circ s_{A_1}$$

par paquet de deux, et en se rappelant que, $\forall M, N \in \mathcal{E}$, $s_M \circ s_N = t_{2\overrightarrow{NM}}$, on obtient ainsi,

$$\mathrm{id}_{\mathcal{E}} = s_{A_n} \circ s_{A_{n-1}} \circ ... \circ s_{A_2} \circ s_{A_1} = t_{2\overrightarrow{A_{n-1}A_n}} \circ ... \circ t_{2\overrightarrow{A_2A_1}} = t_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + ... + 2\overrightarrow{A_2A_1}}$$

Ce qui implique

$$\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + ... + \overrightarrow{A_2A_1} = 0$$

<u>*Méthode 2* :</u> Pour $1 \leq i \leq n$, posons respectivement a_i et z_i les affixes de A_i et M_i. L'hypothèse se réécrit

$$\begin{cases} \frac{z_1+z_2}{2} & = a_1 \\ \frac{z_2+z_3}{2} & = a_2 \\ & \vdots \\ \frac{z_{n-1}+z_n}{2} & = a_{n-1} \\ \frac{z_n+z_1}{2} & = a_n \end{cases}$$

Matriciellement, on obtient $MZ = A$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'il s'agit d'un déterminant circulant et en posant

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \quad \text{et} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

on a :

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} P(\omega^j) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\omega^j \right) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - y_j) \qquad \text{où } \; y_j = \frac{\omega^j + 1}{2}$$

Par suite,
- Pour n est impair : on a $j = 2p+1$ pour $p \in \mathbb{N}$ et donc $e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}} \neq -1$ et ainsi $y_j \neq 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$. Donc M est inversible et il y a bien une unique solution Z.

- Pour n est pair : on a $j = 2p$ pour $p \in \mathbb{N}$ et donc, pour un certain j_0, on a $j_0 = p$, alors $e^{\frac{2ij_0\pi}{2p}} = e^{i\pi} = -1$ et ainsi $y_{j_0} = 0$. Donc, soit le système $MZ = A$ n'admet aucune solution, soit une infinité.