

Espaces complets. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Intuitivement, un espace complet, c'est un espace "sans trous". Pour formaliser ceci, on va demander à toute suite de Cauchy de converger. Un premier contre-exemple facile : la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans \mathbb{R}^* , est de Cauchy, car convergente vers 0, mais $0 \notin \mathbb{R}^*$. Donc \mathbb{R}^* n'est pas complet (On pouvait le "sentir" car \mathbb{R}^* a un "trou" en 0). Il y a d'autres exemples d'espaces non complets \mathbb{Q} , $C^0([0, 1], \|\cdot\|_1)$, ... Parmi ceux qui sont complets, on le très célèbre \mathbb{R} et par le théorème de Riesz-Fischer, on a que les espaces L^p sont des espaces de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Les quatre points importants sont : "Toute série absolument convergente est convergente", le théorème du point fixe est vraie pour les applications contractantes, une application uniformément continue sur une partie dense se prolonge de façon unique, et le théorème de Baire (dont on ne parlera pas ici). Il s'agit là d'un cadre indispensable pour faire de la "bonne analyse fonctionnelle".

Un type important d'espaces complets sont les espaces de Hilbert. Il s'agit d'une généralisation à la dimension infinie des espaces euclidiens. Les espaces de Hilbert sont très intéressants car on a un petit plus géométrique dans ces espaces : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc.

Références

- [ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
- [GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
- [ML3al] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
- [DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
- [BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
- [OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Théorème de Riesz-Fischer
Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
Projection sur un convexe fermé

1 Suites de Cauchy et propriétés

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1 Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite (u_n) de E est une suite de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N (dépendant de ϵ) tel que, pour tout $m \geq N$ et tout $n \geq N$, on ait $d(u_n, u_m) \leq \epsilon$. [ELAM] p.34

Remarque 2 La condition ci-dessus s'écrit aussi : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq N : n \geq N$ implique $d(u_{n+p}, u_n) \leq \epsilon$. [ELAM] p.34

Proposition 3 1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy
2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée. [ELAM] p.34

Exemple 4 • La suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} est de Cauchy.

• La suite $(\sum_{k=0}^n 1/k)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} n'est pas de Cauchy.

Proposition 5 Une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente. [ML3al] p.85

1.2 Espaces complets

Définition 6 On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge. [GOUan] p.20

Exemple 7 \mathbb{R} est complet. \mathbb{Q} n'est pas complet. [GOUan] p.20

Proposition 8 Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. L'espace métrique $E_1 \times \dots \times E_n$ est complet (au sens de la norme produit) si et seulement si pour tout i , (E_i, d_i) est complet. [GOUan] p.20

Proposition 9 Soit (E, d) un espace complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de

E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(F_n) = 0$ (où $\text{diam}(F_n)$ désigne le diamètre de F_n). Alors il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$. [GOUan] p.20

2 Les grands théorèmes

2.1 Théorème de prolongement

Théorème 10 Soient (E, d_E) un espace métrique, (F, d_F) un espace métrique complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F . Alors, il existe une unique application continue g de E dans F qui coïncide avec f sur A . De plus, g est uniformément continue. [ML3al] p.95

Application 11 Construction de l'intégrale de Riemman. [ML3al] p.95

2.2 Théorèmes de point fixe

Définition 12 Soient (E, d_E) , (F, d_F) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est contractante (ou k-contractante) s'il existe $k \in]0, 1[$, $\forall (x, y) \in E^2$, $d_F(f(x), f(y)) \leq kd_E(x, y)$. [ML3al] p.97

Théorème 13 Théorème du point fixe de Picard Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe. [ML3al] p.97

Exemple 14 Ce théorème est faux si l'on suppose seulement $d_F(f(x), f(y)) \leq d_E(x, y)$. Par exemple, la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Mais si l'on ajoute de la compacité, il redevient vrai. [ML3al] p.97

Application 15 Le système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos(x+y) \\ y = \frac{1}{2} \sin(x-y) \end{cases}$$

admet une unique solution. [ML3al] p.692

Proposition 16 Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel f^p soit contractante. Alors f admet un unique point fixe. [ML3al] p.98

Application 17 Théorème de Cauchy-Lipschitz Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans \mathbb{R} et une unique application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. [GOUal] p.354

3 Espaces de Banach

Définition 18 Un espace vectoriel normé complet s'appelle un espace de Banach. [GOUan] p.20

Proposition 19 Tout espace vectoriel réel normé de dimension finie est complet. [DTZ] p.43

Théorème 20 Soient (E, d) un espace complet, et (u_n) une suite de Cauchy de E . Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente. [DTZ] p.260

Théorème 21 ♠ Théorème de Riesz-Fischer ♠ L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. [BRZ] p.57

4 Espaces de Hilbert

4.1 Définitions et premières propriétés [ML3al] p.324 → 326

Définition 22 Un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sur \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est un \mathbb{K} -espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que l'espace vectoriel $(H, \|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ soit complet.

Exemple 23 1) \mathbb{K}^n muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ est complet pour la norme associée.

2) $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est complet pour la norme définie par

$$\|f\| = \sqrt{\int_X |f|^2}$$

3) $l^2(I, \mathbb{K})$ est complet pour la norme définie par

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k \in I} |x_k|^2}$$

Proposition 24 Identité de polarisation

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} + i \frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4}$$

Proposition 25 Identité du parallélogramme

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$. Alors,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4.2 Orthogonalité [ML3al] p.326 → 330

Définition 26 Deux éléments $x, y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Deux parties $A, B \subset H$ sont dites orthogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$. On note $A \perp B$.

Proposition 27 Pour toute partie $A \subset H$, on note

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$$

A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de H , appelé orthogonal de A dans H qui vérifie

- 1) si $B \subset A$, alors $A^\perp \subset B^\perp$
- 2) $A \subset (A^\perp)^\perp$
- 3) $\overline{A^\perp} = A^\perp$
- 4) $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp = \overline{\text{vect}(A)}^\perp$
- 5) $\text{vect}(A) \cap A^\perp = \{0\}$

Théorème 28 ♠ Projection sur un convexe fermé
 ♠ Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.

Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$\|x - u\| = \min_{y \in K} \|x - y\| \quad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad \text{et} \quad \langle x - u, y - u \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K \quad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Théorème 29 Projection sur un sous-espace fermé
 Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) $y \in p_K(x)$
- 2) $y \in K$ et $(x - y) \in K^\perp$

Proposition 30 Soit K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . Alors l'application $p_K : H \rightarrow H, x \mapsto p_K(x)$ est une application linéaire continue qui vérifie :

- 1) $p_K \circ p_K = p_K$
- 2) $\text{Imp}_K = K$ et $\text{Ker}p_K = K^\perp$
- 3) $\text{Id}_H - p_K$ est la projection sur K^\perp
- 4) $\text{Ker}p_K \oplus \text{Imp}_K = H$

Corollaire 31 1) Si L est un sous-espace vectoriel fermé de H , alors $L \oplus L^\perp = H$

2) Si $A \subset H$ est une partie quelconque de H , alors $\text{vect}(A) \oplus A^\perp = H$ et $(A^\perp)^\perp = \text{vect}(A)$. En particulier, si $A = K$ est un sous-espace vectoriel de H , alors

$$\overline{K} \oplus K^\perp = H \quad \text{et} \quad (K^\perp)^\perp = \overline{K}$$

3) Si K est un sous-espace vectoriel de H , alors K est dans H si et seulement si $K^\perp = 0$

Corollaire 32 Un sous-espace vectoriel K de H est dense dans H si et seulement si toute forme linéaire continue sur H et nulle sur K est nulle sur H .

4.3 Polynômes orthogonaux

Définition 33 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de H est dite

- 1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
- 2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
- 3) totale si $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans H .

On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H . [ML3al] p.331

Proposition 34 1) Toute famille orthonormée est libre

2) $(e_i)_{i \in I}$ est une famille totale si et seulement si la condition $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$ implique $x = 0$. [ML3al] p.331

Définition 35 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. [OBJ] p.110

Théorème 36 ♠ Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
 ♠ Soit I un intervalle de \mathbb{R} et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$. [OBJ] p.140 → 143

Questions

Exercice : Montrer que $l^p(\mathbb{C})$ n'est pas un espace pré-hilbertien si $p \neq 2$.

Solution : On utilise la caractérisation principale des espaces pré-hilbertiens : l'identité du parallélogramme (*i.e*)

(Une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E provient d'un produit scalaire)

\Leftrightarrow

($\|\cdot\|$ l'identité du parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \forall (x, y) \in E^2$)

Soit $p \in [1, +\infty[$. On considère les deux suites :

$$x = (1, 0, 0, \dots) \in l^p(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad y = (0, 1, 0, \dots) \in l^p(\mathbb{C})$$

D'une part,

$$\|x + y\|_{l^p}^2 + \|x - y\|_{l^p}^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p}$$

D'autre part,

$$\|x\|_{l^p}^2 + \|y\|_{l^p}^2 = 2$$

Ainsi $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ si $2^{2/p} = 2$ et donc si $p = 2$.

Exercice : 1) Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel f^p soit k -contractante (avec $k \in [0, 1[$). Alors f admet un unique point fixe.

2) Trouver une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} non contractante qui admet un point fixe.

3) Trouver une fonction contractante de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$ qui n'a pas de point fixe.

4) Montrer que la fonction f définie par $f : [0, \pi/2] \rightarrow [0, \pi/2], x \mapsto \cos x$ a un point fixe.

Solution :

1) • **Unicité :** Supposons que f ait deux points fixes a et b (*i.e.*) $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Remarquons qu'un point fixe de f est encore un point fixe de f^p . En effet,

$$f^p(a) = \underbrace{f^{p-1}(f(a))}_{=a} = f^{p-1}(a) = \underbrace{f^{p-2}(f(a))}_{=a} = f^{p-2}(a) = \dots = f(a) = a$$

Ainsi, a et b sont deux points fixes de f^p . Mais comme f^p est contractante, on a

$$d(\underbrace{f^p(a)}_{=a}, \underbrace{f^p(b)}_{=b}) < kd(a, b)$$

Comme $k \in [0, 1[$, on a donc $d(a, b) = 0$ et donc $a = b$.

• **Existence :** Si a est un point fixe de f^p , alors

$$f(a) = f(f^p(a)) = f^p(f(a))$$

Donc $f(a)$ est aussi un point fixe de f^p , mais par unicité, on a donc $f(a) = a$ et a est un point fixe de f .

2) La fonction Identité.

3) La fonction $x \mapsto x/2$

4) La fonction f n'est pas contractante, mais f^2 l'est. En effet, $f^2(x) = \cos(\cos x)$ vérifie :

$$\forall x, y \in]0, \pi/2[, \exists c \in]0, \pi/2[\text{ tel que } |\cos(\cos x) - \cos(\cos y)| = |\sin(\underbrace{\cos c}_{\leq 1}) \underbrace{\sin c}_{\leq 1}| \|x - y\| \leq |\sin 1| \|x - y\|$$

Comme $\sin 1 < 1$, on a ainsi que f^2 est contractante et donc que f admet un point fixe.

Exercice : Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach

(ii) Toute série d'éléments de E absolument convergente est convergente

Solution :

(i) \Rightarrow (ii) : On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. Soit $\sum_{n \geq 0} x_n$ tel que $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ converge. Considérons la suite (réelle!) $X'_n = \sum_{k=0}^n \|x_k\|$ et la suite $X_n = \sum_{k=0}^n x_k$ pour tout $n \geq 0$. Pour tout entier $q > p$, on a :

$$\|X_q - X_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^q x_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|x_k\| = X'_q - X'_p$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ converge, (X'_n) est de Cauchy et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$q > p \geq N \Rightarrow |X'_q - X'_p| \leq \epsilon$$

Par suite, on a

$$q > p \geq N \Rightarrow \|X_q - X_p\| \leq \epsilon$$

Donc la suite (X_n) est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$ qui est complet donc converge.

(ii) \Rightarrow (i) : On suppose que toute série absolument convergente est convergente. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$ donc

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q > p \geq N) \Rightarrow (\|u_q - u_p\| \leq \epsilon)$$

On prend $\epsilon = 1$, et il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{pour } q \geq n_0 \Rightarrow \|u_q - u_{n_0}\| \leq 1$$

On prend $\epsilon = 1/2$, et il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 > n_0$ tel que

$$\|u_{n_1} - u_{n_0}\| \leq 1 \text{ et pour } q \geq n_1 \Rightarrow \|u_q - u_{n_1}\| \leq 1/2$$

Par récurrence, on construit une suite croissante $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\| \leq (\frac{1}{2})^{k-1}$. Si on pose $x_k = u_{n_k} - u_{n_{k-1}}$ on voit donc que la série $\sum \|x_k\|$ converge et par hypothèse que la série $\sum x_k$ converge dans E .

Or $X_p := \sum_{k=1}^p u_{n_k} - u_{n_{k-1}} = u_{n_p} - u_{n_0}$. On en tire donc que la sous-suite $(u_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E donc la suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E par le lemme suivant (à connaître!).

Conclusion : $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach

Lemme : Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est elle-même convergente.

Démonstration

Soit $l = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n_p}$ et soit $\epsilon > 0$, il existe $P_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq P_0$, on ait $\|u_{n_p} - l\| \leq \epsilon$ (convergence de la sous-suite).

D'autre part, il existe $P_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq p \geq P_1$, on ait $\|u_q - u_p\| \leq \epsilon$ (suite de Cauchy).

Soit $P_2 = \max(P_0, P_1)$ et soit $p \geq P_2$, on a

$$\|u_p - l\| \leq \underbrace{\|u_p - u_{n_p}\|}_{\leq \epsilon \text{ car } n_p \geq p \geq P_1} + \underbrace{\|u_{n_p} - l\|}_{\leq \epsilon \text{ car } p \geq P_0} \leq 2\epsilon$$

Remarque : On a utilisé le fait que $n_p \leq p$. C'est une des propriétés des suites extraites et qui demande une petite explication.

Il faut montrer que pour $n_0 \geq 0$ et $n_{p+1} > n_p$, on a $n_p \geq p$. Une petite récurrence fera l'affaire.

Pour $p = 0$, on a bien $n_0 \geq 0$.

Supposons la propriété vraie au rang p et montrons la au rang $p + 1$:

$n_{p+1} > n_p \geq p$ la dernière inégalité est justifiée par hypothèse de récurrence. On a donc $n_{p+1} > p$ mais comme n_{p+1} est un entier, on a donc $n_{p+1} \geq p + 1$.