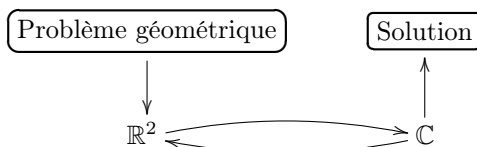


# Applications des nombres complexes à la géométrie.

Mohamed NASSIRI

Le fait d'avoir une dualité entre  $\mathbb{C}$  et plan géométrique  $\mathbb{R}^2$  est une aubaine pour les problèmes géométriques, notamment les problèmes de géométrie plane. Les nombres complexes sont un levier pour la résolution de problème géométriques



Les différentes formes d'écriture d'un complexe (trigonométrique et exponentielle) sont principalement l'atout dans la résolution des problèmes géométriques. Attention, cependant à la subtilité de l'écriture exponentielle d'un complexe ... Le fait d'écrire

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

est justifié par le formule de Moivre ( $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ ). Donc, démontrer la formule de Moivre en utilisant la forme exponentielle d'un nombre complexe est une *malhonnêteté intellectuelle* (*dixit* Olivier Serman).

L'un des premiers exemples le plus frappant est l'application suivante quand on écrit les barycentres sous forme complexe : Soit  $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  une suite d'affixes du plan complexe. En notant,  $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$ , on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \text{ et } Z_{k+1} = \left( \frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \right)$$

Alors la suite  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers l'isobarycentre des affixes  $z_1, \dots, z_n$ .

Ce théorème a une interprétation géométrique très intéressante! En partant d'un polygone à  $n$  côtés, le polygone des milieux "converge" vers l'isobarycentre du polygone de départ. Attention cependant à l'emploi du mot "convergence" ... Même si, intuitivement, on comprend ce que ça veut dire, ce n'est pas mathématique correcte s'il n'y a pas de définition d'une topologie sur l'ensemble des polygones qui permettrait à une suite de polygones de tendre vers un point.

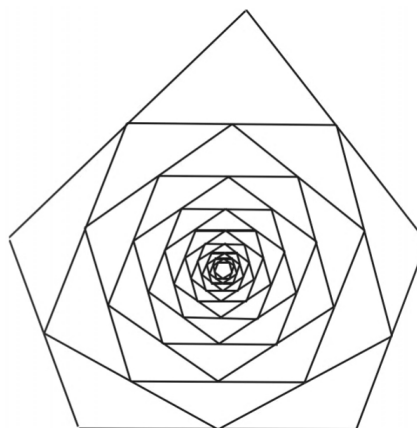


Illustration de la "convergence" des polygones

Le plus intrigant est que cette affirmation reste encore vraie si le polygone est non convexe (on dit aussi *polygone concave*). En effet, dans la démonstration, la suite de points est quelconque!

On va également s'intéresser aux équations de droites et cercles complexes mais aussi aux transformations du plan : rotation, homothétie, symétrie, etc. Cependant, deux transformations vont être particulièrement intéressantes : les inversions et les homographies.

Grâce à la projection stéréographique, on peut "voir"  $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  comme une sphère, dite *sphère de Riemann*. On définit les inversions et les homographies sur la sphère de Riemann. Les inversions permettent de mettre en relation les droites et les cercles. Quant aux homographies, elles ont la propriété

(comme les inversions) de préserver l'alignement et la cocyclicité. En fait, on a même le résultat plus fort suivant : une application de  $\tilde{\mathbb{C}}$  dans  $\tilde{\mathbb{C}}$  est une homographie si et seulement si elle conserve le birapport.

La géométrie du triangle est une source intarissable de problèmes, simples dans leur énoncé, mais très difficiles. Du côté des polygones réguliers, on a un résultat sympathique : l'ensemble des points ayant pour affixe les racines  $n$ -ièmes de l'unité est l'ensemble des  $n$  sommets d'un polygone régulier de centre  $O$  et inclus dans le cercle trigonométrique. De plus, avec la notion de *racines primitives*, on a l'interprétation suivante :

#### Théorème

Soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\xi$  une racine primitive  $n$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . Alors les (autres) racines primitives  $m$ -ièmes de l'unité sont les  $\xi^k$ , où  $1 \leq k \leq n$   $\text{pgcd}(k, n) = 1$ .

En particulier, si  $n$  est premier, toutes les racines  $n$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$  sont primitives.

#### Interprétation géométrique

Les polygones réguliers étoilés à  $n$  sommets d'un seul tenant s'obtiennent en joignant de  $k$  en  $k$ , avec  $\text{pgcd}(k, n) = 1$ , les sommets d'un polygone régulier à  $n$  sommets.

En particulier, si  $n$  est premier, tous les polygones réguliers étoilés à  $n$  sommets sont d'un seul tenant.

On sait que  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, donc il est inutile de vouloir chercher un sur-corps de  $\mathbb{C}$ . Cependant, si l'on sacrifie la commutativité, on peut créer un sur-corps de  $\mathbb{C}$  : le corps des quaternions  $\mathbb{H}$ . Le lien entre quaternions et transformations géométriques est donné par l'isomorphisme :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

Ce qui permet de faire explicitement le lien entre les quaternions et les rotations dans l'espace sont les *formules de rotation d'Olinde Rodrigues*.

#### Références

- [TRUF] Géométrie élémentaire, Bernard Truffault
- [DJMER] Cours de géométrie, Dany-Jack Mercier
- [TRIG] La géométrie des nombres complexes, Jean Trignan
- [LAV] Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation, Guy Laville
- [BIA] Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne, Jean de Biasi
- [PER] Cours d'Algèbre, Daniel Perrin ♠
- [FGNal1] Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠
- [H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

#### Développements

- Suite de polygones
- Théorème de Gauss-Lucas
- $SO_3(\mathbb{R})$  et les quaternions

## 1 $\mathbb{C}$ comme plan géométrique

### 1.1 Module et argument d'un nombre complexe [BIA] p.73 → 76

**Définition 1** Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe. Le nombre, réel positif,  $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  est donc défini quel que soit  $z \in \mathbb{C}$ . Il est appelé *module* de  $z$  et est noté  $|z|$ .

Si  $z$  est l'affixe de  $M$ , on a  $|z| = OM$ .

**Remarque 2** Pour  $z$  réel, le module coïncide avec la valeur absolue, ce qui justifie la notation choisie.

**Proposition 3** Soient  $z, z_1$  et  $z_2 \in \mathbb{C}$ . Alors, on a  
 (i)  $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$   
 (ii)  $\text{Re}(z) \leq |z|$  et  $\text{Im}(z) \leq |z|$

- (iii)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- (iv)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$

**Application 4** Soient  $A, B$ , et  $C$  trois points du plan et on pose

$$AB = c, BC = a, AC = b$$

Alors les points  $A_n, B_n$  et  $C_n$  tels que

$$A_n B_n = c^n, B_n C_n = a^n, A_n C_n = b^n$$

forment un triangle si et seulement si le triangle  $ABC$  est isocèle.

**Théorème 5** L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif  $\mathbb{U}$ , sous-groupe multiplicatif de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ . C'est le noyau du

morphisme

$$(\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$$

$$z \mapsto |z|$$

**Proposition-Définition 6** Soit  $z = x + iy$  l'affixe d'un point  $M$  du plan. Alors  $\frac{z}{|z|}$  est l'affixe d'un point  $m$  qui appartient au cercle trigonométrique. Si  $\theta = (\bar{u}, \overline{Om}) \pmod{2\pi}$ , alors on a

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$

avec  $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  et  $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\theta$  est appelé argument de  $z$  et est noté  $\arg z = \theta$ .

La valeur de  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  est appelé argument principal de  $z$  et est noté  $\text{Arg} z = \theta$ .

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$  est appelé forme trigonométrique de  $z$ .

**Proposition 7** (i)  $\arg(-z) = \pi + \arg z \pmod{2\pi}$

(ii)  $\arg(\bar{z}) = -\arg z \pmod{2\pi}$

(iii)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$

**Proposition 8** Formule de Moivre

$\forall n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

**Proposition-Définition 9** On pose  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ . Alors, on a

(i) Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

(ii) Formule de Moivre exponentielle

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

(iii) Pour la beauté

$$e^{i\pi} = -1$$

Le nombre complexe non nul  $z$ , de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$ , s'écrit alors  $\rho e^{i\theta}$ . C'est l'écriture exponentielle de  $z$ .

## 1.2 Relations et équations élémentaires [LAV] p.147

**Proposition 10** Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux points du plan d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ . Alors

(i)  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = 0$ .

(ii)  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$  sont colinéaires si et seulement si  $\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = 0$ .

(iii)  $\langle \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2} \rangle = \text{Re}(\bar{z}_1 z_2)$ .

(iv)  $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2} = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2)$ .

**Proposition 11** Soient  $M_0, M_1$  et  $M_2$  deux points du plan d'affixes respectives  $z_0, z_1$  et  $z_2$ . Alors l'angle formé par deux droites se coupant en  $M_0$  et passant par  $M_1$  et  $M_2$  est

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) = \arg(z_2 - z_0) + \arg(z_1 - z_0)$$

## 1.3 Barycentres

**Proposition 12** Expression des coordonnées du barycentre dans le plan :

On considère  $n$  points du plan  $A_1, \dots, A_n$  données par leurs affixes  $(z_1), \dots, (z_n)$  et  $n$  réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Le barycentre de  $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$  admet pour affixe :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

[TRUF] p.41

**Application 13** ♠ Suite de polygones ♠

Soit  $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  une suite d'affixes du plan complexe.

En notant,  $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$ , on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \text{ et}$$

$$Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2}\right)$$

Alors la suite  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers l'isobarycentre des affixes  $z_1, \dots, z_n$ .

**Application 14** ♠ Théorème de Gauss-Lucas ♠

• Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non constant. Les racines de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ .

• Le plus grand entier  $n$  tel que les racines non nulles de  $(X+1)^n - X^n - 1$  soient de module 1 est 7.

• Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non constant,  $\Delta$  une droite du plan complexe,  $H_1$  et  $H_2$  les deux demi-plans ouverts limités par  $\Delta$ . On suppose que  $P'$  a une racine dans  $H_1$ . Alors  $P(H_1) = \mathbb{C}$ . [FGNall] p.229 → 231

## 2 Droites et cercles [TRIG] p.55, 93

**Proposition 15** Soient  $M_0, M_1$  et  $M_2$  deux points du plan d'affixes respectives  $z_0, z_1$  et  $z_2$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $M_0, M_1$  et  $M_2$  soient alignés est

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}$$

**Proposition 16** Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux points du plan d'affixes respectives  $z_0$  et  $z_1$ . Alors l'équation de la droite passant par  $M_0$  et  $M_1$  est

$$(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)z - (z_1 - z_0)\bar{z} + \bar{z}_0 z_1 - z_0 \bar{z}_1 = 0$$

L'équation d'une droite en complexes est de la forme

$$bz - \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

avec  $c \in i\mathbb{R}$ .

**Proposition 17** Soient  $B$  et  $C$  deux points du plan d'affixes respectives  $b$  et  $c$ . Alors l'équation de la droite orthogonale à  $\overrightarrow{OB}$  passant par  $C$  est

$$\bar{b}(z - c) + b(\bar{z} - \bar{c}) = 0$$

[LAV] p.148

**Proposition 18** Soient  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$  deux points du plan d'affixes respectives  $z_0, z_1, z_2$  et  $z_3$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$  soient cocycliques est

$$\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}{\bar{z}_0 - \bar{z}_3} : \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}$$

Le complexe  $\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$  est appelé birapport des points  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$ . [TRIG] p.91

**Proposition 19** L'équation d'une droite en complexes est de la forme

$$az\bar{z} + bz - \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

avec  $c \in i\mathbb{R}$ .

### 3 Transformations du plan [LAV] p.148-149

#### 3.1 Expression de quelques transformations élémentaires du plan [LAV] p.148-149

**Proposition 20** Soit  $\vec{u}$  un vecteur d'affixe  $a$ , alors la translation de vecteur  $\vec{u}$  est

$$z \mapsto z + a$$

**Proposition 21** Soient  $\Omega$  un point d'affixe  $\omega$  et  $k \in \mathbb{R}$ , alors l'homothétie de centre  $\omega$  et de rapport  $k$  est

$$z \mapsto kz + (1 - k)\omega$$

**Proposition 22** Soient  $\Omega$  un point d'affixe  $\omega$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ , alors la rotation de centre  $\omega$  et d'angle  $\theta$  est

$$z \mapsto e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$$

**Proposition 23** Soient  $(D)$  une droite d'équation  $bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$  alors la projection orthogonale sur la droite  $(D)$  est

$$z \mapsto \frac{1}{2b}(bz - \bar{b}\bar{z} - c)$$

**Proposition 24** Soient  $(D)$  une droite d'équation  $bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$  alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $(D)$  est

$$z \mapsto -\frac{1}{b}(\bar{b}\bar{z} + c)$$

### 3.2 Projection stéréographique [H2G2t1] p.309-310

**Définition 25** Soit  $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , réalisons le plan complexe comme le plan d'équation  $z = 0$ .

Soit  $\mathbb{S}^2$  la sphère centrée à l'origine et de rayon 1. On note  $N$  le point  $(0, 0, 1)$  (le pôle Nord).

On appelle projection stéréographique de pôle  $N$  l'application

$$p : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$$

définie ainsi :

Etant donné un point  $M = (x, y, z)$  de la sphère, on considère l'intersection  $P = (u, v, 0)$  de la droite  $(MN)$  et du plan équatorial. On pose alors  $p(M) = u + iv$ .

On pose  $p(N) = \infty$ .

Voir Figure 1

**Proposition 26** La projection stéréographique est un homéomorphisme de la sphère euclidienne  $\mathbb{S}^2$  sur la sphère de Riemann  $\tilde{\mathbb{C}}$ , et on a

$$\begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$$

#### 3.3 Inversion [BIA] p.333 → 340

**Définition 27** Etant donné un point fixe  $\Omega \neq \infty$  et un nombre réel  $k \neq 0$ , l'inversion de pôle  $\Omega$  et de puissance  $k$ , notée  $\Phi$ , est la transformation qui à tout point  $M$  du plan, distinct de  $O$ , fait correspondre un point  $M'$ , appelé inverse de  $M$ , de la droite  $(\Omega M)$  tel que  $\frac{\Omega M}{\Omega M'} = k$ .

Par construction, cette transformation est involutive.

**Proposition 28** La forme complexe d'une inversion de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et de puissance  $k$  est

$$z \mapsto \omega + \frac{k}{\bar{z} - \bar{\omega}}$$

**Théorème 29** Inversion Cercle-Droite

(i) Soient  $\mathcal{C}$  un cercle passant par  $\Omega$ ,  $A$  le point diamétralement opposé à  $\Omega$  et  $A'$  son image par  $\Phi$ . L'image de  $\mathcal{C}$  par  $\Phi$  est la droite  $\mathcal{D}$  perpendiculaire à  $(\Omega A)$  et passant par  $A'$ .

(ii) L'image par  $\Phi$  d'une droite  $\mathcal{D}$  ne passant par  $\Omega$  est un cercle passant par  $\Omega$  et privé du point  $\Omega$ .

(iii) L'image par  $\Phi$  d'un cercle ne contenant pas  $\Omega$  est un cercle ne contenant pas  $\Omega$ .

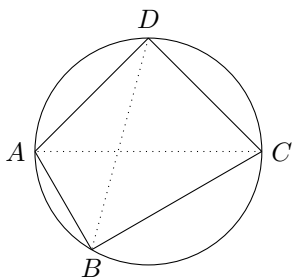
(iv) L'image par  $\Phi$  d'une droite passant par  $\Omega$  est elle-même privé du point  $\Omega$ . [DJMER] p.371-372

**Proposition 30** (i) Le birapport des inverses de quatre points est le conjugué du rapport de ces quatre points.

(ii) Si quatre points sont alignés ou cocycliques, leurs inverses le sont aussi.

**Théorème 31** Théorème de Ptolémée

Pour qu'un quadrilatère soit convexe et inscriptible dans un cercle, il faut et il suffit que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

### 3.4 Homographie [BIA] p.345-347

**Définition 32** Une homographie  $h$  de la sphère de Riemann est une application de la forme

$$h : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec  $ad - bc \neq 0$ . On pose :

- si  $c \neq 0$ ,  $h(-c/d) = \infty$  et  $h(\infty) = a/c$ , et
- si  $c = 0$ ,  $h(\infty) = \infty$ .

**Remarque 33** Cas particuliers :

- $c = 0$ ,  $h$  est une similitude.
- $a = d = 0$ ,  $h$  est la composée d'une réflexion par rapport à l'axe réel, par l'inversion de centre  $O$  et de puissance  $|b/c|$  et par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\text{Arg}(b/c)$ .

**Proposition 34** La bijection réciproque de

$$h : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est

$$h^{-1} : z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}$$

**Proposition-Définition 35** L'ensemble des homographies de  $\tilde{\mathbb{C}}$  muni de la loi  $\circ$  est un groupe (non commutatif) de bijections. Il est appelé groupe circulaire droit.

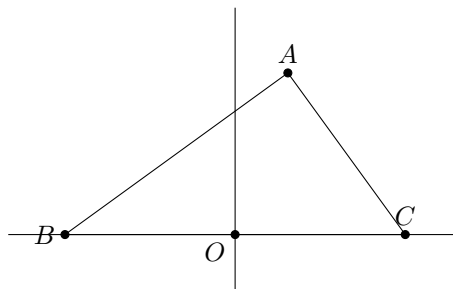
**Théorème 36** Une application de  $\tilde{\mathbb{C}}$  dans  $\tilde{\mathbb{C}}$  est une homographie si et seulement si elle conserve le birapport.

## 4 Etude des polygones à l'aide des nombres complexes

### 4.1 Géométrie du triangle [TRIG] p.41 → 64

**Proposition 37** Condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit isocèle

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-b$ ,  $b$  et  $z$  forment un triangle isocèle si et seulement si  $z + \bar{z} = 0$ .



Interprétation géométrique : La condition  $z + \bar{z} = 0$  est équivalente à  $z \in i\mathbb{R}$ .

**Proposition 38** Condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit rectangle

Avec les mêmes notations que précédemment, les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-b$ ,  $b$  et  $z$  forment un triangle isocèle si et seulement si  $z\bar{z} = b^2$ .

Interprétation géométrique : La condition  $z\bar{z} = b^2$  est équivalente à dire que la médiane relative à l'hypoténuse soit égale à la moitié de celle-ci (i.e.)  $OA = \frac{1}{2}BC$ .

**Proposition 39** Condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit équilatéral

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  forment un triangle équilatéral si et seulement si

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a + bj^2 + cj = 0$$

ou encore

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

**Proposition 40** Affixe du centre du cercle circonscrit

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des points d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

(i) Les médiatrices du triangle  $ABC$  sont concourantes en un point (noté  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ ).

(ii)

$$\omega = \frac{a\bar{a}(b - c) + b\bar{b}(c - a) + c\bar{c}(a - b)}{(c\bar{b} - b\bar{c}) + (a\bar{c} - \bar{a}c) + (b\bar{a} - a\bar{b})}$$

**Proposition 41** *Affixe de l'orthocentre*

Soient  $A, B$  et  $C$  des points d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ .

(i) Les hauteurs du triangle  $ABC$  sont concourantes en un point (noté  $H$  d'affixe  $h$ ).

(ii)

$$h = \frac{a[a(\bar{b} - \bar{c}) + \bar{a}(b - c)]}{(b\bar{c} - \bar{b}c) + (c\bar{a} - \bar{c}a) + (a\bar{b} - \bar{a}b)} + \frac{b[b(\bar{c} - \bar{a}) + \bar{b}(c - a)]}{(b\bar{c} - \bar{b}c) + (c\bar{a} - \bar{c}a) + (a\bar{b} - \bar{a}b)} + \frac{c[c(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{c}(a - b)]}{(b\bar{c} - \bar{b}c) + (c\bar{a} - \bar{c}a) + (a\bar{b} - \bar{a}b)}$$

(iii) En prenant comme origine du repère, le centre du cercle circonscrit, l'affixe de l'orthocentre devient

$$h = a + b + c$$

**Théorème 42** Le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité d'un triangle quelconque sont sur une même droite, appelée droite d'Euler.

**4.2 Racines  $n$ -ième de l'unité et polygones réguliers [BIA] p.79-80**

**Définition 43** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note l'ensemble  $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ .

On appelle racine primitive  $n$ -ièmes de l'unité tout générateur de  $\mathbb{U}_n$ .

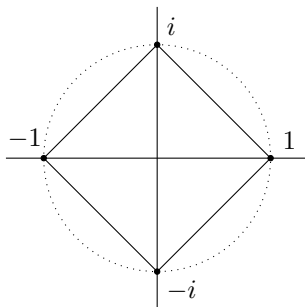
On note  $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des racines primitives  $n$ -ièmes de l'unité et  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des points ayant pour affixe les racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Proposition 44** (i)  $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{\exp(2ik\pi/n), 1 \leq k \leq n\}$  est un groupe cyclique d'ordre  $n$ .

(ii)  $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{\exp(2ik\pi/n), 1 \leq k \leq m, \text{pgcd}(k, n) = 1\}$  a pour cardinal  $\varphi(n)$ .

(iii)  $\mathcal{P}_n$  est l'ensemble des  $n$  sommets d'un polygone régulier de centre  $O$  et inclus dans le cercle trigonométrique.

**Exemple 45**  $\mathcal{U}_4(\mathbb{C}) = \{1, -1, i, -i\}$ .



**Proposition 46** Soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\xi$  une racine primitive  $n$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . Alors les

(autres) racines primitives  $m$ -ièmes de l'unité sont les  $\xi^k$ , où  $1 \leq k \leq n \text{ pgcd}(k, n) = 1$ .

En particulier, si  $n$  est premier, toutes les racines  $n$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$  sont primitives.

**Remarque 47** Interprétation géométrique

Les polygones réguliers étoilés à  $n$  sommets d'un seul tenant s'obtiennent en joignant de  $k$  en  $k$ , avec  $\text{pgcd}(k, n) = 1$ , les sommets d'un polygone régulier à  $n$  sommets.

En particulier, si  $n$  est premier, tous les polygones réguliers étoilés à  $n$  sommets sont d'un seul tenant. Voir Figure 3, Figure 4 et Figure 5.

**4.3 Théorème de Napoléon [LAV] p.168-170**

**Contexte 48** Soit  $A, B$  et  $C$  trois points quelconques du plan et  $D, E$  et  $F$  trois autres points tels que les triangles  $ABD, BCE$  et  $ACF$  soient équilatéraux.

Voir Figure 6

**Théorème 49** Le centre de gravité  $G$  du triangle  $DEF$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

**Théorème 50** Théorème de Napoléon

Soient  $H, I$  et  $J$  respectivement les centres de gravité des triangles  $ABD, BCE$  et  $ACF$ . Alors le triangle  $IHJ$  est équilatéral.

**5 Quaternions [PER] p.160 → 164**

**Proposition-Définition 51** Il existe une algèbre  $\mathbb{H}$  de dimension 4 sur  $\mathbb{R}$ , appelé algèbre des quaternions, muni d'une base  $1, i, j, k$  telle que :

(i) 1 est élément neutre pour la multiplication,

(ii) on a les formules  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Un quaternion s'écrit alors

$$q = a + bi + cj + dk, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

**Définition 52**  $\mathbb{H}$  est muni de la norme algébrique  $N$  suivante :  $\forall q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$

$$N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

**Théorème 53** ♠  $SO_3(\mathbb{R})$  et les quaternions ♠

Soit  $G$  le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

## Illustrations

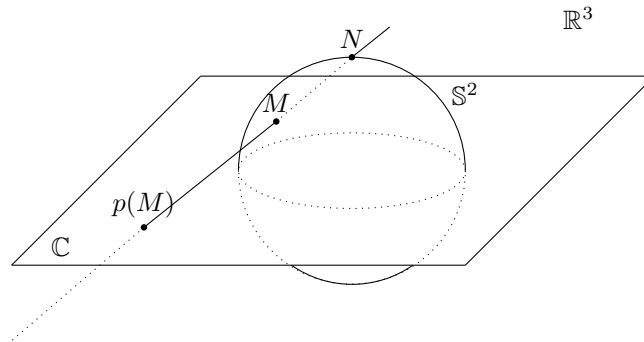


Figure 1 : Projection stéréographique.

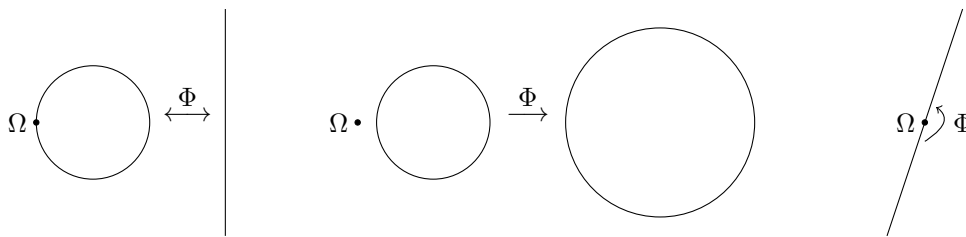


Figure 2 : Récapitulatif de l'image d'un cercle et d'une droite par une inversion  $\Phi$  de centre  $\Omega$ .

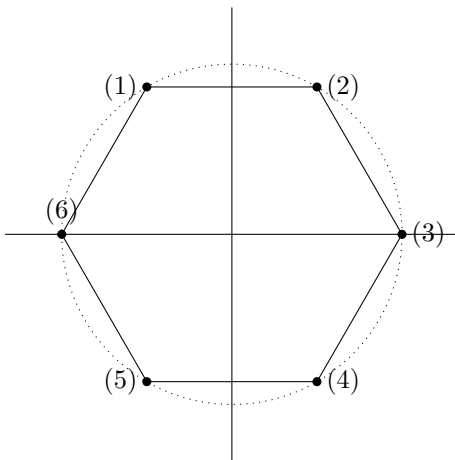


Figure 3 : Polygone régulier étoilé d'un seul tenant avec  $n = 6$  et  $k = 5$ .

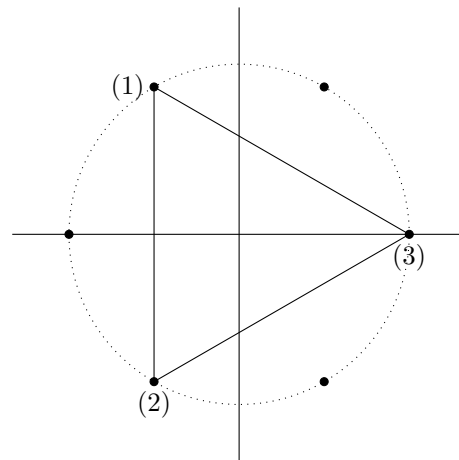


Figure 4 : Echec du polygone régulier étoilé d'un seul tenant avec  $n = 6$  et  $k = 2$ .

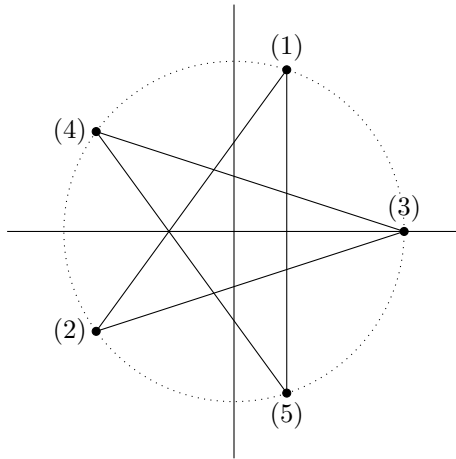


Figure 5 : Polygone régulier étoilé d'un seul tenant avec  $n = 5$  et  $k = 2$ .

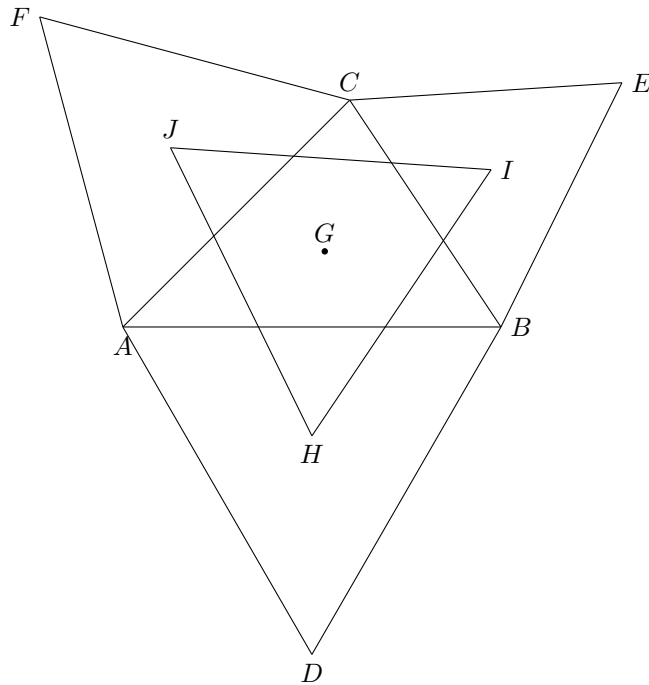


Figure 6 : Illustration du théorème de Napoléon.

---

*più via più di meno fa più di meno.*  
*meno via più di meno fa meno di meno.*  
*più via meno di meno fa meno di meno.*  
*meno via meno di meno fa più di meno.*  
*Miù di meno via più di meno fa meno.*  
*Più di meno via meno di meno fa più.*  
*Meno di meno via più di meno fa più.*  
*Meno di meno via meno di meno fa meno.*

La comptine de Bombelli, Bombelli, 1572.

Il s'agit de la table de multiplication de  $\{1, -1, i, -i\}$ .  
 Traduction : *Più* = 1 , *Meno* = -1, *Più di meno* =  $i$ , *Meno di meno* =  $-i$

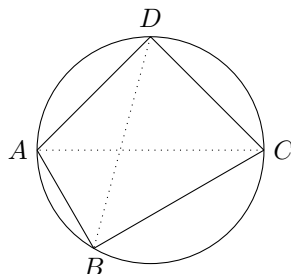


## Questions

---

### Exercice : Théorème de Ptolémée

Montrer que pour qu'un quadrilatère soit convexe et inscriptible dans un cercle, il faut et il suffit que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad (\dagger)$$


---

*Solution* : Notons  $a, b, c$  et  $d$  les affixes respectives de  $A, B, C$  et  $D$ .

Commençons par remarquer que l'on a l'égalité

$$(c - a)(d - b) = (b - a)(d - c) + (d - a)(c - b)$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= |(b - a)(d - c)| + |(d - a)(c - b)| \\ &\geq |(b - a)(d - c) + (d - a)(c - b)| \\ &= |(c - a)(d - b)| = AC \cdot BD \end{aligned}$$

On a donc l'inégalité de Ptolémée  $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$ , qui est une égalité si et seulement si l'on a une égalité dans l'inégalité triangulaire (*i.e.*) s'il existe un réel positif  $\lambda$  tel que

$$(b - a)(d - c) = \lambda(d - a)(c - b) \Leftrightarrow \frac{(b - a)(d - c)}{(d - a)(b - c)} \in \mathbb{R}_+ \quad (\dagger\dagger)$$

Ce qui traduit la cocyclicité ou l'alignement des points  $A, B, C, D$ .

- Ainsi, on a montré que tout quadrilatère convexe  $ABCD$  qui vérifie  $(\dagger)$  est inscriptible dans un cercle.
- Réciproquement, supposons que le quadrilatère convexe  $ABCD$  soit inscriptible dans un cercle  $\mathcal{C}$ . La condition de cocyclicité montre l'existence d'un réel  $\lambda$  tel que

$$\frac{(b - a)(d - c)}{(d - a)(b - c)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Si  $\lambda$  était positif, on aurait

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi)$$

et les sommets  $A$  et  $C$  appartiendraient au même demi-plan de frontière  $(BD)$ , ce qui est exclu (car  $ABCD$  est supposé convexe). Donc  $\lambda \in \mathbb{R}_-$  et ainsi on obtient  $(\dagger\dagger)$

---

**Exercice** : Soient  $A, B$  et  $C$  des points d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ . Montrer que  $A, B$  et  $C$  forment un triangle équilatéral si et seulement si

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a + bj^2 + cj = 0$$

ou encore

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

*Solution* : On va se permettre de confondre un point et son affixe pour la démonstration. En notant  $j = e^{2i\pi/3}$ , montrons que la rotation  $R$  de centre  $c$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  s'écrit

$$R(z) = -j^2z - jc, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Soit  $z'$  l'image par  $R$  de  $z$ , on a donc

$$\overrightarrow{cz'} = (\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))\overrightarrow{cz} = -(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3))\overrightarrow{cz} = -j^2\overrightarrow{cz}$$

A l'aide des affixes, on a donc

$$z' - c = -j^2(z - c) \Rightarrow z' = -j^2z + (1 + j^2)c$$

Or, comme  $1 + j + j^2 = 0$ , on a donc

$$R(z) = -j^2z - jc$$

Par suite,  $a$ ,  $b$  et  $c$  forment un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si

$$R(a) = b \Leftrightarrow -j^2a - jc = b \Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0$$

Puis,  $a$ ,  $b$  et  $c$  forment un triangle équilatéral de sens indirect si et seulement si

$$R(b) = a \Leftrightarrow -j^2b - jc = a \Leftrightarrow a + bj^2 + cj = 0$$

Et finalement,  $a$ ,  $b$  et  $c$  forment un triangle équilatéral si et seulement si

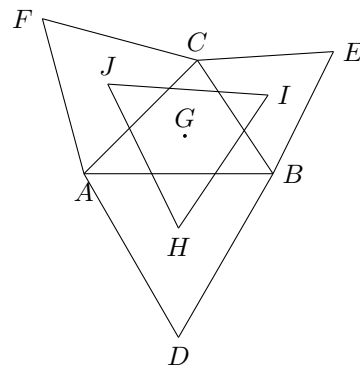
$$\begin{aligned} & (a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = 0 \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca) \underbrace{(j^2 + j)}_{=-1} = 0 \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \end{aligned}$$

### Exercice : Théorème de Napoléon

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points quelconques du plan et  $D$ ,  $E$  et  $F$  trois autres points tels que les triangles  $ABD$ ,  $BCE$  et  $ACF$  soient équilatéraux.

(i) Montrer que le centre de gravité  $G$  du triangle  $DEF$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

(ii) *Théorème de Napoléon*. Soient  $H$ ,  $I$  et  $J$  respectivement les centres de gravité des triangles  $ABD$ ,  $BCE$  et  $ACF$ . Montrer que le triangle  $IHJ$  est équilatéral.



*Solution* : (i) Pour un point  $M$ , notons  $z_M$  son affixe.

$E$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , et en notant  $j = e^{2i\pi/3}$ , on a montré dans l'exercice précédent que la rotation  $R$  de centre  $c$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  s'écrit

$$R(z) = -j^2z - jc, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Par suite, on en déduit que

$$\begin{cases} z_E &= -j^2 z_B - j z_C \\ z_F &= -j^2 z_C - j z_A \\ z_D &= -j^2 z_A - j z_B \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(z_D + z_E + z_F) &= -\frac{1}{3}(j^2 z_A + j z_B + j^2 z_B + j z_C + j^2 z_C + j z_A) \\ &= -\frac{1}{3}((j + j^2)z_A + (j + j^2)z_B + (j + j^2)z_C) \\ &= \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \end{aligned}$$

Ce qui traduit bien le fait que le centre de gravité du triangle  $DEF$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

(ii) On peut écrire l'affixe du centre de gravité  $I$  du triangle  $BCE$  sous la forme :

$$z_I = \frac{1}{3}(z_B + z_C + z_E) = \frac{1}{3}(z_B + z_C - j^2 z_B - j z_C) = \frac{1-j}{3}((1+j)z_B + z_C)$$

Par suite, on en déduit que

$$\begin{cases} z_I &= \frac{1-j}{3}((1+j)z_B + z_C) \\ z_J &= \frac{1-j}{3}((1+j)z_C + z_A) \\ z_H &= \frac{1-j}{3}((1+j)z_A + z_B) \end{cases}$$

Et donc,

$$\begin{cases} z_J - z_H &= \frac{j-1}{3}(j^2 z_C + j z_A + z_B) \\ z_H - z_I &= \frac{j-1}{3}(j^2 z_A + j z_B + z_C) \\ z_I - z_J &= \frac{j-1}{3}(j^2 z_B + j z_C + z_B) \end{cases}$$

On remarque alors que

$$z_J - z_H = j^2(z_H - z_I) = j(z_I - z_J)$$

Ce qui traduit le fait que  $H$ ,  $I$  et  $J$  (respectivement les centres de gravité des triangles  $ABD$ ,  $BCE$  et  $ACF$ ) forment un triangle équilatéral.