Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Mohamed NASSIRI

Références:

Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni - p.208-209

Recasage :

●●●●● 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
●●●●● 156 : Exponentielle de matrices. Applications.
●●●●● 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
●●●●○ 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
●●●○○ 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
●●●○○ 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Résumé:

C'est un développement classique de l'agrégation ! L'exponentielle de matrices, définit à l'aide une série convergente, est une généralisation la fonction exponentielle aux matrices.
On montre ici que lorsque l'on restreint l'exponentielle de matrices à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{H}_n$, on obtient un homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_n^{++}$).

Prérequis:

Exponentielle de matrices - Groupe orthogonal - Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles définie positives

---

Théorème :
• L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
• L'application $\exp : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n^{++}$ est un homéomorphisme.

Démonstration.
Pour la démonstration, on se limite au cas réel. Pour montrer l'homéomorphisme, on procède classiquement : on montre que l'application est bien définie, continue, bijective et que sa réciproque est continue.

Etape 1 - Définition et continuité:
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, comme $\exp S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} S^k$, S détermine de façon unique $\exp S$.
Comme $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1} = P\mathrm{diag}(\lambda_i)^tP$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\exp S = \exp(P\mathrm{diag}(\lambda_i)^tP) = P\mathrm{diag}(\exp(\lambda_i))^tP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

car $\exp(\lambda_i) > 0$ pour tout i (et la symétrie est évidente), donc exp envoie bien $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
De plus, $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue comme somme d'une série normalement convergente sur tout

compact. Par restriction à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, elle reste encore continue.

Etape 2 - Surjectivité :
Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P\mathrm{diag}(\mu_i)P^{-1} = P\mathrm{diag}(\mu_i)^tP$ avec $\mu_i \in \mathbb{R}^{+*}$.
Posons $A = P\mathrm{diag}(\ln(\mu_i))^tP$. A est clairement symétrique et on a

$$\exp A = \exp(P\mathrm{diag}(\ln(\mu_i))^tP) = P\mathrm{diag}(\exp(\ln(\mu_i)))^tP = P\mathrm{diag}(\mu_i)^tP = B,$$

d'où la surjectivité.

Etape 3 - Injectivité :
Supposons que $\exp A = \exp A'$, avec $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit Q le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que pour tout i, $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. Alors A' commute avec $Q(\exp A') = Q(\exp A) = A$, et A et A' sont donc diagonalisables dans une même base. Il existe ainsi une matrice de passage P_0 telle que

$$A' = P_0\mathrm{diag}(\mu_1', ..., \mu_n')P_0^{-1} \text{ et } A = P_0\mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)P_0^{-1}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\exp A' = \exp A &\Rightarrow P_0\mathrm{diag}(\exp(\lambda_1'), ..., \exp(\lambda_n'))P_0^{-1} = P_0\mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n))P_0^{-1} \\
&\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n,\ \exp(\lambda_i') = \exp(\lambda_i) \\
&\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n,\ \lambda_i' = \lambda_i \quad (\mu_i', \mu_i \in \mathbb{R} \text{ car exp est injective dans } \mathbb{R}) \\
&\Rightarrow A = A'
\end{aligned}$$

donc exp est injective.

Etape 4 - Continuité de $\exp^{-1}$:
Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (\exp A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B = \exp A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons que (A_p) converge vers A.

Comme elle converge, la suite (B_p) est bornée pour la norme $||.||_2$. De même, par continuité du passage à l'inverse, la suite (B_p^{-1}) converge vers (B^{-1}), donc elle est aussi bornée pour $||.||_2$.
Or, $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $||M||_2 = \rho(M)$, où ρ est le rayon spectral.

Comme $\mathrm{sp}(B_p^{-1}) = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\mu} \in \mathrm{sp}(B_p)\}$, on en déduit que les valeurs propres des B_p sont contenues dans le compact $K = [C', C] \subset [0, +\infty]$ (où C et C' sont des constantes). Par suite, les valeurs propres des A_p sont contenues dans le compact $K = [\ln C', \ln C]$ de $\mathbb{R}$, et donc la suite (A_p) est bornée pour la norme $||.||_2$.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\overline{A}$ valeur d'adhérence de $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ (*i.e.*) il existe une sous-suite $(A_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (A_p) converge vers $\overline{A}$.
Or, comme on a $B_{p_k} = \exp A_{p_k}$, on en déduit que $\exp A = \exp \overline{A}$ (car $B_{p_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B = \exp A$). Par injectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il vient $\overline{A} = A$.
Une suite ne possédant qu'une valeur d'adhérence dans un compact converge vers cette valeur d'adhérence. Donc (A_p) converge vers A.

$\square$

Remarques :

- Dans la démonstration, on introduit Q le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que pour tout i, $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. Il faut faire attention ici au fait que les λ_i ne sont pas tous distincts. Quitte à réindexer les λ_i, on peut supposer que $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont distincts et que $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_n$ apparaissent par les $\lambda_1, ..., \lambda_r$. On prend alors le polynôme

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} \frac{X - e^{\lambda_j}}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}$$

- On a utilisé que pour tout $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $||M||_2 = \rho(M)$, où ρ est le rayon spectral.
  Cela vient du fait que pour tout $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $||M||_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)} = \sqrt{\rho(M^2)} = \rho(M)$. Cependant, on peut le démontrer directement sans utiliser la décomposition polaire et donc la formule $||M||_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)}$.

  Démonstration : On procède par double inégalité.

  Montrons que $||M||_2 \geq \rho(M)$:
  Soit $\lambda_0 = \rho(M)$. Il existe donc un vecteur propre de norme X_0 tel que $MX_0 = \lambda_0 X_0$. Par suite

$$\begin{aligned} ||MX_0||_2 = ||\lambda_0 X_0||_2 &\Leftrightarrow ||MX_0||_2 = |\lambda_0|\ ||X_0||_2 \\ &\Rightarrow ||M||_2 ||X_0||_2 \geq |\lambda_0|\ ||X_0||_2 \\ &\Rightarrow ||M||_2 \geq |\lambda_0| = \rho(M) \end{aligned}$$

  Montrons que $||M||_2 \leq \rho(M)$:
  Comme $M \in \mathcal{S}_n^{(}\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$. Par suite, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $||X||_2 = 1$, on a

$$\begin{aligned} ||MX||_2 &= ||P\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}X||_2 \\ &= ||P\mathrm{diag}(\lambda_i)Y||_2 \text{ en posant } Y = P^{-1}X \\ &= ||\mathrm{diag}(\lambda_i)Y||_2 \text{ car } P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ &= (\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\sum_{i=0}^{n} \rho(M)^2 (y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \rho(M) \underbrace{||Y||_2}_{=1} \text{ car } Y = P^{-1}X \text{ avec } ||X||_2 = 1 \text{ et } P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

  donc $||M||_2 = \sup\limits_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ ||X||_2 = 1}} ||MX||_2 \leq \rho(M)$.

  □

Quelques conséquences de la décomposition polaire :

- **Corollaire :**
  On en déduit les isomorphismes suivants :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \approx \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \approx \mathrm{U}_n \times \mathbb{R}^{n^2}$$

  Démonstration :
  Par la décomposition polaire, on a les homéomorphismes suivants :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$\mathrm{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

et par l'exponentielle matricielle, on a les homéomorphismes suivants :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{H}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n^{++}$$

Or $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ donc il est isomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, et de même $\mathcal{H}_n$, est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n^2 donc il est isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$. D'où le résultat.

$\square$

- Mises en garde sur le développement : Ce développement est très proche, dans sa démonstration, de celui sur la décomposition polaire. Il est donc déconseillé de présenter les deux comme **seuls** développements.