

Critère de Sylvester et une application

Mohamed NASSIRI

Référence :

Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon, p.243 → 245

Recasage :

- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- 152 : Déterminant. Exemples et applications.
- 156 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Résumé :

Il s'agit d'un critère assez simple pour montrer qu'une matrice symétrique est définie positive ne portant que sur les mineurs principaux.

Prérequis :

Formes quadratiques - Orthogonalité - Matrices symétriques définies positives

Critère de Sylvester : Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, on définit la matrice extraite $M_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in M_k(\mathbb{R})$. Alors M est définie positive si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\det M_k > 0$.

Démonstration. • \Rightarrow :

On va proposer deux méthodes. Une s'inspirant des formes quadratiques et l'autre de la définition de définie positivité du point de vue matricielle. Nous allons faire exactement la même chose dans les deux cas : il s'agit seulement d'un jeu de réécriture.

Méthode 1 :

Soit q la forme quadratique dont M est la matrice dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n . Pour tout k , M_k est la matrice de la restriction de q à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Comme q est définie positive (par hypothèse), M_k est définie positive et donc $\det M_k > 0$ pour tout k .

Méthode 2 :

Comme M est définie positive, on sait que ${}^t X M X > 0$, $\forall X \neq 0$

En particulier, en prenant le vecteur X_k suivant :

$$X_k = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

On aura donc $0 < {}^t X_k M X_k = {}^t \tilde{X}_k M_k \tilde{X}_k$, où $\tilde{X}_k = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Donc M_k est définie positive et ainsi $\det M_k > 0$.

• \Leftarrow :

On va raisonner par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Le cas $n = 1$ est évident.

On suppose donc le résultat vrai au rang $n - 1$ et montrons le au rang n .

L'idée ici sera d'utiliser les hyperplans qui sont de dimension $n - 1$ où l'on sait que notre propriété est vraie et de "gagner une dimension" grâce aux orthogonaux des hyperplans qui sont de dimension 1.

Soit donc H l'hyperplan défini par $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Par hypothèse de récurrence, la restriction $q|_H$ est définie positive.

Soit (e'_1, \dots, e'_{n-1}) une base orthonormée pour $q|_H$. On rappelle que l'on a $H^\perp \oplus H = \mathbb{R}^n$ et si $e'_n \in H^\perp$ ($e'_n \neq 0$), alors $B = (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e'_n)$ est une base de \mathbb{R}^n et dans cette base, la matrice de q est de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Si a est positif, on a gagné ! En effet, on aura $q(x) = {}^t X Q X = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + a x_n^2$ (et donc avec $a > 0$, q sera définie positive).

Soit P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à la base B , on a donc $Q = {}^t P M P$, et par suite $\det Q = (\det P)^2 \det M > 0$ (car pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\det M_k > 0$, en particulier pour $k = n$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$). Donc $a = \det Q > 0$ et ainsi q est définie positive, et par conséquent M aussi. \square

Application : $A = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique définie positive.

Démonstration.

Il y a une petite astuce ici qui va consister à réécrire les termes de la matrice A sous forme intégrale et de raisonner ensuite avec les intégrales.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$. Pour tout $t \in]0; 1[$, si on a ${}^t X M(t) X > 0$ alors par continuité de $t \rightarrow {}^t X M(t) X$, on a :

$$0 < \int_0^1 {}^t X M(t) X dt = {}^t X \left(\int_0^1 M(t) dt \right) X = {}^t X A X$$

où l'on a posé $A = \left(\int_0^1 M(t) dt \right)$. Donc A est définie positive.

Revenons à notre application. Il suffit de remarquer que l'on a :

$$\frac{1}{1+|i-j|} = \int_0^1 t^{|i-j|} dt$$

D'après notre petit interlude, il suffit donc de montrer que pour tout $t \in]0; 1[$, la matrice (incontestablement) symétrique $M(t) = (t^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive. Allons-y !

Pour tout $1 \leq r \leq n$, posons $D_r(t) = \det(t^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq r}$.

Montrons par récurrence sur r que $D_r(t) = (1 - t^2)^{r-1}$ et grâce au critère de Sylvester, on aura donc que $M(t)$ est définie positive pour tout $t \in]0; 1[$.

Pour $r = 1$, c'est évident (car pour tout $t \in]0; 1[$, $M(t) = 1 \dots$)

On suppose donc le résultat vrai au rang r et montrons le au rang $r + 1$.

$$D_{r+1}(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{r-1} & t^r \\ t & 1 & \ddots & \ddots & t^{r-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t^{r-1} & \ddots & \ddots & 1 & t \\ t^r & t^{r-1} & \dots & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{r-1} & 0 \\ t & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t^{r-1} & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ t^r & t^{r-1} & \dots & t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t^2)D_r(t)$$

où l'on a soustrait à la dernière colonne t fois l'avant dernière. □

Remarques :

- Concernant l'application, il y a une forte ressemblance avec la matrice de Hilbert. Cette dernière est définie positive et est un cas classique (pour ne pas dire LE cas classique) de matrice mal conditionnée (le conditionnement de H_n est de l'ordre de $e^{\frac{7n}{2}}$ lorsque n est grand).

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Sauf que la définie positivité est "plus facile" à démontrer. En utilisant notre petite astuce intégrale, on a ici :

$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$$

et ainsi on a donc :

$$\begin{aligned} {}^t X H X &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geq 0 \end{aligned}$$

- Deux autres calculs classiques de positivité méritent d'être mis en avant.

Proposition : 1) Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Alors la matrice $M = (m_{ij}) = (t_i t_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive.
 2) Soient $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Alors la matrice $M = (m_{ij}) = (\inf(t_i, t_j)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive.

Démonstration :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} {}^t x M x &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i t_j x_i x_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n t_j x_j \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc M est bien positive.

2) Détaillons un peu la matrice M :

$$\begin{aligned}
 M = (\inf(t_i, t_j)) &= \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_1 & \dots & t_1 \end{pmatrix}}_{=M_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 & \dots & t_2 - t_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & t_2 - t_1 & \dots & t_2 - t_1 \end{pmatrix}}_{=M_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}}_{=M_n}
 \end{aligned}$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et posant $t_0 = 0$, on a

$${}^t x M x = {}^t x (M_1 + M_2 + \dots + M_n) x = \sum_{i=1}^n \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\geq 0} \left(\sum_{k=i}^n x_k \right)^2 \geq 0$$

Donc M est bien positive.

□