Différentielle du déterminant

Mohamed NASSIRI

Références :

Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière- p.74-75

Recasage :

●●●●● 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de GL(E). Applications.
● ● ● ● ● 152 : Déterminant. Exemples et applications.
● ● ● ● ● 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Résumé :

Prérequis :

Déterminant - Applications différentiables

Théorème : L'application *déterminant* est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}(\ {}^t\mathrm{com}(X)H)$$

Démonstration.
• On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice, donc de classe C^1 (et même C^∞). Pour obtenir $D\det(I)$, il suffit donc de calculer la dérivée de det en I dans une directon quelconque $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Or si $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} = sp(H)$, on a $\{t\lambda_1 + 1, ..., t\lambda_n + 1\} = \mathrm{sp}(I + tH)$, d'où

$$\det(I + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + O(t^2) = \underbrace{1}_{\det(I)} + \mathrm{tr}(H) + O(t^2) \quad \text{pour } t \to 0$$

d'où $D\det(I)(H) = \mathrm{tr}(H)$.

• Soit $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\det(X + H) &= \det(X).\det(I + X^{-1}H)\\ &= \det(X).(1 + \mathrm{tr}(X^{-1}H) + o(||H||))\\ &= \det(X) + \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(X)H) + o(||H||)\end{aligned}$$

Par suite, $D\det(X)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(X)H)$ pour tout $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

• On vient de démontrer le résultat pour les matrices inversibles. Pour passer à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on va utiliser la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, les matrices inversibles forment un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elles sont caractérisées par $\det(X) \neq 0$, donc forment un ouvert.
Pour $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, de valeurs propres (réelles ou complexes) $\lambda_1, ..., \lambda_n$, on peut choisir une suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$ (par exemple la suite $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$), telle que :

$$\det(Y - \epsilon_k I) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \epsilon_k) \neq 0$$

Les matrices $X_k = Y - \epsilon_k I$ sont alors inversibles et convergent vers Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

Remarques :

- A

- Mises en garde sur le développement :
  Attention à ...