

# Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

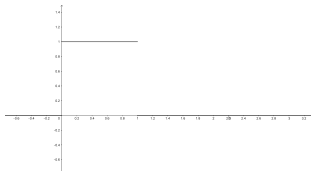
Mohamed NASSIRI

Avant de rentrer dans le vif du sujet, on revoit rapidement la notion de *fonctions intégrables* pour laquelle nous avons besoin des notions de *fonctions et ensembles mesurables* ainsi que des *fonctions étagées*. Un bref rappel des *ensembles de mesure nulle et négligeable* (oui oui, il y a une différence entre les deux!) est donné. Pour finir, les théorèmes fondamentaux de la théorie de l'intégration sont également rappelés : *Théorème de convergence monotone*, *Lemme de Fatou*, *Théorème de convergence dominée* et *théorème de Fubini-Tonelli*.

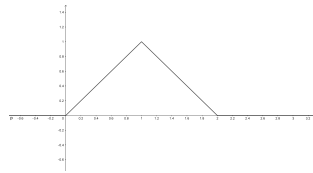
Après ces brefs rappels, nous attaquons les espaces  $L^p$ . Le choix a été fait de donner quelques résultats (*Inégalité de Hölder*, *Inégalité de Cauchy-Schwarz* et *Inégalité de Minkowski*) dans les espaces  $\mathcal{L}^p(X)$  et non les espaces  $L^p(X)$ . Le seul *théorème de Riesz-Fischer* est énoncé dans les espaces  ${}^p(X)$ .

La *convolution* est une notion importante dans les espaces  $L^p$ . Elle permet de "gagner de la régularité". En effet, afin de voir l'effet de la convolution sur une fonction  $f$ , prenons une fonction très simple et sans "une trop bonne régularité" :  $f = \chi_{[0,1]}$ . On peut montrer que l'on a

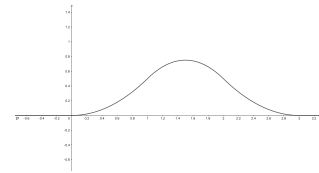
$$f * f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad f * f * f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{-2x^2 + 6x - 3}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{(3-x)^2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Courbe de  $f$



Courbe de  $f * f$



Courbe de  $f * f * f$

On peut montrer que l'algèbre de Banach  $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$  n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution. C'est ce résultat qui va nous pousser à définir des *approximations de l'unité*. Ces dernières vont nous permettre d'obtenir un résultat sympathique :  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R})$  et à support compact, est dense dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $1 \leq p < +\infty$ .

Un résultat de dualité dans les espaces  $L^p$  mérite d'être mis en avant : *Théorème de représentation de Riesz*. Il nous dit que pour  $1 \leq p < +\infty$ ,  $q$  son exposant conjugué, et  $\varphi \in (L^p(X))'$ . Alors il existe une unique  $g \in L^q(X)$  telle que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X g f d\mu \quad \forall f \in L^p(X) \quad \text{et on a} \quad \|\varphi\|_{(L^p)'} = \|g\|_q$$

Ce qui nous permet de faire l'identification  $(L^p(X))' = L^q(X)$

L'espace  $L^2$  est un espace  $L^p$  un peu spécial : c'est un espace de Hilbert. Il a un petit "plus" géométrique : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc. Avec la notion de *base hilbertienne*, on obtient des résultats très intéressants. Une application aux séries de Fourier en est un bon exemple. Dans l'espace  $L^2_{2\pi}$ , en notant,  $e_n(x) = e^{inx}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $L^2_{2\pi}$ , si bien que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

Le "dans  $L^2_{2\pi}$ " est très important ! Cette relation n'est pas toujours vraie en l'appliquant en un point  $x$  ! En ajoutant la notion de *fonction poids*, on peut même construire des bases hilbertiennes dites *bases hilbertiennes des polynômes orthogonaux*.

Pour finir, les *espaces de Sobolev* offre une très belle application aux équations différentielles. Notre point de départ est le suivant : Soient  $f \in L^2(]0, 1])$  et  $q \in L^\infty(]0, 1])$  des fonctions à valeurs positives. On considère le problème

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace  $\mathcal{H}$  des fonctions de classe  $C^2([0, 1])$  qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

avec

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert. Le génie de cette méthode n'est pas de chercher des fonctions de "façon locale" mais un espace de fonctions, donc de "façon globale". Les espaces de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  et  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$  seront solutions :

Espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$

$$\mathcal{H}^1([0, 1]) = \left\{ u \in C([0, 1]) \mid \exists g \in L^2([0, 1]), \right. \\ \left. u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)dt \right\}$$

Espace de Sobolev  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$

$$\mathcal{H}_0^1([0, 1]) = \{u \in \mathcal{H}^1([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

Seul petit hic, on va devoir définir une nouvelle notion de "dérivée" : *dérivée faible*. Les fonctions solutions ne seront pas forcément de classe  $C^2([0, 1])$ . Cependant, si  $f$  et  $q$  sont des fonctions continues, alors  $u$  est une fonction de classe  $C^2([0, 1])$ . Ouf!

### Références

- [FAR] Calcul intégral, Jacques Faraut
- [ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
- [ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amrani
- [HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
- [CAND] Calcul intégral, Bernard Candelpergher
- [BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
- [OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

### Développements

Théorème de Riesz-Fischer

Noyaux de caractères et sous-groupes distingués

Dans cette leçon,  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  est un espace mesuré,  $\lambda_n$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  et  $p \in ]0, +\infty]$  sauf mention contraire.

## 0 Quelques rappels

### 0.1 Espaces et fonctions mesurables, fonctions intégrables [ML3an] p.205 → 238

**Définition 1** Soit  $X$  un ensemble. Une *tribu* sur  $X$  est un sous-ensemble  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{P}(X)$  qui vérifie les

*conditions suivantes :*

- (i)  $X \in \mathcal{M}$
- (ii) si  $A \in \mathcal{M}$ , alors  $A^c \in \mathcal{M}$
- (iii) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ , alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$

Les éléments de  $\mathcal{M}$  sont appelés *ensembles mesurables*. Un *espace mesurable* est un couple  $(X, \mathcal{M})$ , où  $X$  est un ensemble et  $\mathcal{M}$  une tribu sur  $X$ .

**Définition 2** Soient  $(X_1, \mathcal{M}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{M}_2)$  deux espaces mesurables. Une application  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est dite *mesurable* si pour tout ensemble mesurable  $M \in \mathcal{M}_2$ , on a  $f^{-1}(M) \in \mathcal{M}_1$

**Définition 3** Soit  $(X, \mathcal{M})$  un espace mesurable. Une mesure sur  $X$  est une application de  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  telle que :

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de parties mesurables deux à deux disjointes, alors

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Si  $\mu$  est une mesure sur  $(X, \mathcal{M})$ , l'espace  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  est appelé un espace mesuré.

**Proposition 4** Soit  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré.

- (i) Si  $A_1$  et  $A_2$  sont mesurables, avec  $A_1 \subset A_2$ , alors  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ .
- (ii) Si  $\mu(A_2) < +\infty$ , alors  $\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$
- (iii) Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de parties mesurables, alors

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

- (iv) Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de parties mesurables et si  $\mu(A_0) < +\infty$ , alors

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

- (v) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de parties mesurables, alors

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

**Définition 5** (i) Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles. Une application  $\varphi : X \rightarrow Y$  est dite étagée si l'ensemble image  $\varphi(X)$  est une partie finie de  $Y$ .

(ii) Supposons que  $Y = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou encore  $[0, +\infty[$ , et soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une fonction étagée. Notons  $\varphi(X) = \{y_1, \dots, y_m\} \subset Y$ , les  $y_j$  étant supposés deux à deux distincts, et posons  $A_j = \varphi^{-1}(\{y_j\})$  pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Alors

$$\varphi = \sum_{j=1}^m y_j \chi_{A_j}$$

est appelé représentation standard de  $\varphi$ .

**Définition 6** Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  est un espace mesuré,  $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction étagée, et  $\varphi = \sum_{j=1}^m y_j \chi_{A_j}$  la représentation standard de  $\varphi$ . On appelle intégrale de  $\varphi$  sur  $X$  la quantité

$$\int_X \varphi d\mu := \sum_{j=1}^m y_j \mu(A_j) \in [0, +\infty]$$

**Définition 7** (i) Soit  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction mesurable. On appelle intégrale de  $f$  sur  $X$  la quantité

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{\varphi : X \rightarrow [0, +\infty[ \\ \text{mesurable étagée} \\ \varphi \leq f}} \left\{ \int_X \varphi d\mu \right\} \in [0, +\infty]$$

Si  $A \subset X$  est une partie mesurable, on pose  $\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$ .

(ii) Une fonction  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  est dite intégrable si elle est mesurable et si son intégrale au sens ci-dessus est finie :  $\int_X f d\mu < +\infty$

## 0.2 Ensembles négligeables

**Définition 8** (i) Un sous-ensemble  $E$  de  $X$  est dit de mesure nulle s'il est mesurable et si  $\mu(E) = 0$ .

(ii) Si  $A \subset X$ , un sous-ensemble  $E$  est dit de mesure nulle dans  $A$  si  $E \cap A$  est de mesure nulle dans  $X$ . [ML3an] p.193

**Définition 9** Une partie  $N \subset X$  est dite  $\mu$ -négligeable ou négligeable s'il existe une partie  $A$  mesurable de  $X$  telle que  $\mu(A) = 0$  et  $N \subset A$ . [ML3an] p.219

**Application 10** Théorème de Sard en dimension 1 Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On note

$$C = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

Alors  $f(C)$  est une partie de mesure nulle de  $\mathbb{R}$  (i.e.) pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $f(C)$  est contenu dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à  $\epsilon$ .

**Théorème 11** Soient  $A$  un ensemble mesurable de  $X$  et  $f$  une fonction mesurable positive sur  $A$ . L'intégrale  $\int_A f d\mu$  est nulle si et seulement si  $f$  est nulle sur  $A$ , sauf éventuellement sur un ensemble  $N \subset A$  de mesure nulle. [CAND] p.259

## 0.3 Résultats préliminaires d'intégration [ML3an] p.239 → 261

$(X, \mathcal{M}, \mu)$  est un espace mesuré.

**Théorème 12** Théorème de convergence monotone Soit  $(f_n : X \rightarrow [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables vérifiant  $f_n \leq f_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . Alors  $f$  est mesurable, et on a

$$\int_X f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n$$

**Corollaire 13** Soit  $(f_n : X \rightarrow [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions intégrables vérifiant  $f_n \leq f_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . Alors  $f$

est intégrable si et seulement si la suite croissante  $(\int_x f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée. Dans ce cas, on a

$$\int_X f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n$$

**Théorème 14** Lemme de Fatou

Soit  $(f_n : X \rightarrow [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables. Alors

$$\int_X (\liminf f_n) = \liminf \left( \int_X f_n \right)$$

**Théorème 15** Théorème de convergence dominée

Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré complet et  $(f_n : X \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions intégrables. On suppose que :

(i) La suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $f(x)$  pour presque tout  $x$ .

(ii) Il existe une fonction  $g : X \rightarrow [0, +\infty[$  intégrable telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n| \leq g$  pour presque tout  $x$ .

Alors, la fonction  $f$  est intégrable sur  $X$  et on a

1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| = 0$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n = \int_X f$

**Théorème 16** Théorème de Fubini-Tonelli

Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis.

1. Tonelli :

Soit  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction  $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ -mesurable. Alors,

(i) pour tout  $x \in X$ , la fonction  $f_x : Y \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathcal{N}$ -mesurable,

(ii) pour tout  $y \in Y$ , la fonction  $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathcal{M}$ -mesurable,

(iii) la fonction

$$g : X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$x \mapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y)$$

est  $\mathcal{M}$ -mesurable,

(iv) la fonction

$$h : Y \rightarrow [0, +\infty]$$

$$y \mapsto \int_X f_y(x) d\mu(x)$$

est  $\mathcal{N}$ -mesurable.

(v) Enfin, on

$$\int_X g(x) d\mu(x) = \int_Y h(y) d\nu(y)$$

$$= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

2. Fubini :

Soit  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction  $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ -intégrable. Alors,

(i) pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , la fonction  $f_x : Y \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\nu$ -intégrable,

(ii) pour  $\nu$ -presque tout  $y \in Y$ , la fonction  $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mu$ -intégrable,

(iii) la fonction  $g$  définie  $\mu$ -presque partout par

$$g : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y)$$

est  $\mu$ -intégrable,

(iv) la fonction  $h$  définie  $\nu$ -presque partout par

$$h : Y \rightarrow \mathbb{C}$$

$$y \mapsto \int_X f_y(x) d\mu(x)$$

est  $\nu$ -intégrable.

(v) Enfin, on

$$\int_X g(x) d\mu(x) = \int_Y h(y) d\nu(y)$$

$$= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

(i.e.)

$$\int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

$$= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

## 1 Espaces $L^p(X)$ [ML3an] p.285 → 294

### 1.1 Espaces $\mathcal{L}^p(X)$ et premières propriétés

**Définition 17** Soit  $0 < p < +\infty$ . On note  $\mathcal{L}^p(\mu)$ , ou  $\mathcal{L}^p(X)$ , l'ensemble des fonctions  $f$ , mesurables de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ , qui vérifient

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

Pour une fonction  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ , on note

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

**Définition 18** (i) Soit  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Un majorant essentiel de  $f$  est un élément  $m \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que l'ensemble  $\{f > m\}$  soit négligeable. On notera  $M(f)$  l'ensemble des majorants essentiels de  $f$ .

(ii) Soit  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . La borne inférieure  $m_0$  de  $M(f)$  est appelée

borne supérieure essentielle de  $f$  et est notée  $\text{supess}(f)$ .

(iii) Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  est dite essentiellement bornée, si  $\text{supess}|f| < \infty$ . On note alors  $\|f\|_\infty = \text{supess}|f|$ . L'ensemble des fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  mesurables et essentiellement bornées est noté  $\mathcal{L}^\infty(X)$ .

**Proposition 19** Pour  $p \in ]0, +\infty]$ , l'ensemble  $\mathcal{L}^p(X)$  est un s.e.v. de l'espace des fonctions  $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ .

**Proposition 20** Si l'espace mesuré  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  est de mesure finie, les espaces  $\mathcal{L}^p(X)$  sont décroissants (pour l'inclusion) avec l'exposant  $p$  (i.e.)

$$0 < p \leq p' \leq +\infty \Rightarrow \mathcal{L}^{p'}(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$$

**Proposition 21** Si  $I$  est un ensemble quelconque d'indices, les espaces  $\mathcal{L}^p(I)$  sont croissants (pour l'inclusion) avec l'exposant  $p$  (i.e.)

$$0 < p \leq p' \leq +\infty \Rightarrow \mathcal{L}^p(I) \subset \mathcal{L}^{p'}(I)$$

**Définition 22** On appelle couple d'exposants conjugués un couple  $(p, q)$  de réels strictement supérieurs à 1 qui vérifient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On dit aussi que  $p$  est l'exposant conjugué de  $q$ .  
Convention : L'exposant conjugué de 1 est  $+\infty$ .

**Proposition 23** Inégalité de Hölder  
Soient  $p$  et  $q$  deux exposants conjugués, et  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ . Alors

$$\int_X fg d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X g^q d\mu \right)^{1/q} \leq +\infty$$

Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels  $\gamma$  et  $\delta$ , non tous deux nuls, tels que l'égalité  $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$  ait lieu  $\mu$ -presque partout.

**Corollaire 24** Soient  $p$  et  $q$  deux exposants conjugués.

Si  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  et  $g \in \mathcal{L}^q(X)$ , alors le produit  $fg$  est dans  $\mathcal{L}^1(X)$ , et on a

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels  $\gamma$  et  $\delta$ , non tous deux nuls, tels que l'égalité  $\gamma|f|^p = \delta|g|^q$  ait lieu  $\mu$ -presque partout.

**Corollaire 25** Supposons que  $\mu(X) = 1$ . Alors, pour toute  $f$  mesurable et  $1 \leq p \leq q < +\infty$ , on a

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q$$

**Corollaire 26** Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}^2(X)$ , alors

$$\left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels  $\gamma$  et  $\delta$ , non tous deux nuls, tels que l'égalité  $\gamma f = \delta g$  ait lieu  $\mu$ -presque partout.

**Proposition 27** Inégalité de Minkowski

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables de  $X$  dans  $[0, +\infty]$ . Alors, pour tout  $p \in [1, +\infty]$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

**Corollaire 28** Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ ,  $\|\cdot\|_p$  est une semi-norme sur l'espace  $\mathcal{L}^p(X)$ .

## 1.2 Construction des espaces $L^p(X)$ [ML3an] p.289 → 294

**Définition 29** Pour  $p \in [1, +\infty]$ , l'espace  $L^p(X)$  est le quotient de l'espace  $\mathcal{L}^p(X)$  par le noyau de la semi-norme  $\|\cdot\|_p$

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \text{Ker} \|\cdot\|_p$$

**Proposition 30** Pour  $p \in [1, +\infty]$ , l'application

$$\begin{aligned} L^p(X) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \|f\|_p \end{aligned}$$

est une norme sur  $L^p(X)$ .

**Théorème 31** ♠ Théorème de Riesz-Fischer ♠

$L^p$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .  
[BRZ] p.57

## 1.3 Convolution et espaces $L^p(\mathbb{R})$ [FAR] p.113 → 124

**Définition 32** Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $a \in \mathbb{R}$ . On appelle translatée de  $f$  par  $a$  la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\tau_a f)(x) = f(x - a)$$

**Proposition 33** (i) Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , alors  $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$ .

(ii) Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , alors  $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$

**Théorème 34**  $L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$  :

Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ .

Pour presque tout  $x$ , l'application  $y \mapsto f(x - y)g(y)$  est intégrable.

La fonction  $f * g$ , qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y) dy$$

est intégrable, et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

**Théorème 35**  $L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$  :  
Soient  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .  
Pour presque tout  $x$ , l'application  $y \mapsto f(x-y)g(y)$   
est intégrable.

La fonction  $f * g$ , qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

appartient à  $L^p(\mathbb{R})$ , et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

**Théorème 36**  $L^1(\mathbb{R}) * C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$  :  
Soient  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in C_0(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .  
La fonction  $f * g$  appartient à  $C_0(\mathbb{R})$ , et

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

**Théorème 37**  $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$  :  
Soient  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ .  
La fonction  $f * g$  appartient à  $C_0(\mathbb{R})$ , et

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

**Proposition 38** L'algèbre de Banach  $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$   
n'a pas d'élément neutre pour le produit de convo-  
lution. [ELAM2] p.85

**Définition 39** On appelle approximation de l'unité  
dans  $L^1(\mathbb{R})$  toute suite  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  de fonctions mesu-  
rables positives sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$(i) \forall j \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)dx = 1$$

$$(ii) \forall \epsilon > 0, \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{|x| > \epsilon} \varphi_j(x)dx = 0$$

[ELAM2] p.86

**Exemple 40**

$$\text{Approximation de Laplace} : \varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}$$

$$\text{Approximation de Cauchy} : \varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1 + j^2 x^2}$$

$$\text{Approximation de Gauss} : \varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2 x^2}{2}}$$

[ELAM2] p.86

**Théorème 41** Théorème d'approximation

Soit  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  une approximation de l'unité dans  
 $L^1(\mathbb{R})$ .

(i) Si  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  et bornée,  
alors  $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  
 $\mathbb{R}$ .

(ii) Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , alors  $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$   
converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ . [ELAM2] p.87

**Proposition 42** (i) Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in$   
 $C_c^1(\mathbb{R})$ , alors  $f * \varphi \in C^1(\mathbb{R})$  et

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'$$

(ii) Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , alors  $f * \varphi \in$   
 $C^\infty(\mathbb{R})$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}$$

[FAR] p.123-124

**Théorème 43**  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq$   
 $p < +\infty$ . [FAR] p.125

## 1.4 Dualité dans les espaces $L^p(X)$ [BRZ] p.61 → 66

**Définition 44** Soit  $E$  un e.v.n. de norme  $\|\cdot\|$ . On  
désigne par  $E'$  le dual (topologique) de  $E$  (i.e.) l'es-  
pace des formes linéaires et continues sur  $E$ .  
 $E'$  est muni de la norme duale

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|$$

Lorsque  $f \in E'$  et  $x \in E$ , on notera générale-  
ment  $\langle f, x \rangle$  au lieu de  $f(x)$ . On dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est  
le produit scalaire dans la dualité  $E', E$ .

**Théorème 45** Théorème de représentation de  
Riesz

Soient  $1 \leq p < +\infty$ ,  $q$  son exposant conjugué, et  
 $\varphi \in (L^p(X))'$ . Alors il existe une unique  $g \in L^q(X)$   
telle que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X g f d\mu \quad \forall f \in L^p(X)$$

De plus, on a

$$\|\varphi\|_{(L^p)'} = \|g\|_q$$

**Remarque 46** Pour  $1 \leq p < +\infty$ , on fait souvent  
l'identification

$$(L^p(X))' = L^q(X)$$

Ce théorème est faux pour  $p = +\infty$ . On peut mon-  
trer que

$$L^1(X) \subsetneq (L^\infty(X))'$$

## 2 Espace $L^2(X)$

### 2.1 Propriétés hilbertiennes de $L^2(X)$

**Proposition 47** (i) La norme sur  $L^2(X)$  associé  
au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

est

$$\|f\|_2 = \left( \int_X |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(ii)  $(L^2(X), \|\cdot\|_2)$  est un espace de Hilbert. [ML3an] p.323 → 325

**Théorème 48** Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Soit  $\varphi \in (L^2(X))'$ . Alors il existe une unique  $g \in L^2(X)$  telle que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X g f d\mu \quad \forall f \in L^2(X)$$

De plus, on a  $\|\varphi\|_{(L^2)'} = \|g\|_2$ .

Autrement dit, on a

$$(L^2(X))' = L^2(X)$$

## 2.2 Application aux séries de Fourier

**Définition-Proposition-Rappels 49** (i)  $L^2_{2\pi}$ , l'ensemble des fonctions de  $L^2$  et  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

est un espace de Hilbert. [ELAM2] p.170 → 194

(ii) Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert. Une famille  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  de vecteurs de  $H$  est dite

1) orthogonale si  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  pour tous  $i, j \in I$  tels que  $i \neq j$

2) orthonormée si  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  (où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker)

3) totale si  $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$  est dense dans  $H$ .

On appelle base hilbertienne de  $H$  une famille orthonormée totale de vecteurs de  $H$ . [ML3an] p.331

(iii) 1) Toute famille orthormée est libre

2)  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  est une famille totale si et seulement si la condition  $\langle x, e_i \rangle = 0$  pour tout  $i \in I$  implique  $x = 0$ . [ML3an] p.331

**Théorème 50** Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on désigne par  $e_n$  l'application définie par

$$e_n(x) = e^{inx}$$

Le système trigonométrique  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $L^2_{2\pi}$ .

**Définition 51** Soient  $f \in L^1_{2\pi}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On appelle  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$  le nombre complexe  $c_n(f)$  donné par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Soit  $f \in L^1_{2\pi}$ . On appelle série de Fourier de  $f$  la série trigonométrique (formelle)  $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$ , où  $c_n(f)$  sont les coefficients de Fourier de  $f$ .

**Théorème 52** Formule de Parseval

Si  $f \in L^2_{2\pi}$ , alors

1)  $(S_N(f))$  converge vers  $f$  en moyenne quadratique :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

## 2.3 Polynômes orthogonaux

**Définition 53** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On appelle fonction poids une fonction  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$$

On note  $L^2(I, \rho)$  l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité  $\rho$  par rapport à la mesure de Lebesgue. [OBJ] p.110

**Théorème 54** ♠ Base hilbertienne des polynômes orthogonaux ♠ Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\rho$  une fonction poids. S'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à  $\rho$  forme une base hilbertienne de  $L^2(I, \rho)$  pour la norme  $\|\cdot\|_\rho$ . [OBJ] p.140 → 143

## 3 Espaces de Sobolev $\mathcal{H}^1([0, 1])$ et $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$ [HUB2] p.111 → 122

**Motivation 55** Soient  $f \in L^2(]0, 1[)$  et  $q \in L^\infty(]0, 1[)$  des fonctions à valeurs positives. On considère le problème

$$(\dagger) \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace  $\mathcal{H}$  des fonctions de classe  $C^2([0, 1])$  qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

où

$a$  est une forme bilinéaire symétrique définie par

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x) dx$$

et  $L$  est une forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert.

**Définition 56** On appelle espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  l'espace de fonctions défini, sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$\mathcal{H}^1([0, 1]) = \left\{ u \in C([0, 1]) \mid \exists g \in L^2([0, 1]), \right. \\ \left. u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)dt \right\}$$

On appelle espace de Sobolev  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$ , le sous-espace de  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  défini par

$$\mathcal{H}_0^1([0, 1]) = \{u \in \mathcal{H}^1([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

**Remarque 57** Cette définition est propre à la dimension 1.

**Proposition 58** Soit  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$ , il existe une unique fonction  $g \in L^2([0, 1])$  telle que

$$u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)dt$$

**Définition 59** La fonction  $g$  est alors notée  $Du$  et est appelée dérivée faible de  $u$ .

**Remarque 60** Si  $u \in C^1([0, 1])$ , alors  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$ , et  $Du = u'$ .

**Remarque 61** Soit  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$ , alors pour toute fonction  $\phi \in C_c^1([0, 1])$ ,

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 Du(x)\phi(x)dx$$

Et réciproquement, si  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$  et qu'il existe  $g \in L^2([0, 1])$  telle que pour toute fonction  $\Phi \in C_c^1([0, 1])$ ,

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 g(x)\phi(x)dx$$

alors  $g = Du$ .

**Proposition 62** (i) L'application  $\phi$  définie par

$$\phi(u, v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt + \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt$$

pour tout  $u, v \in L^2([0, 1])$ , est un produit scalaire sur  $\mathcal{H}^1([0, 1])$ . On le notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

(ii) Muni de la norme (associé au produit scalaire) :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1} = \left( \int_0^1 |u(t)|^2 dt + \int_0^1 |Du(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{H}^1([0, 1])$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 63** Les fonctions de l'espace  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  sont höldériennes de rapport  $\frac{1}{2}$  : pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^2} |x - y|^{\frac{1}{2}}$$

où  $\|\cdot\|_{L^2}$  désigne la norme dans l'espace  $L^2([0, 1])$ .

De plus, l'espace  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  s'injecte de façon continue dans l'espace  $C([0, 1])$  /

$$\|u\|_{\infty} \leq \sqrt{2}\|u\|_{\mathcal{H}^1}$$

**Proposition 64** L'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  s'injecte de façon compacte dans les espaces  $C([0, 1])$  et  $L^2([0, 1])$ .

**Remarque 65** L'espace  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  coïncide avec l'espace

$$\{u \in L^2([0, 1]) \mid Du \in L^2([0, 1])\}$$

où  $Du$  est la dérivée faible de  $u$ .

**Proposition 66** L'espace  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}^1([0, 1])$ , c'est donc un espace de Hilbert réel.

**Lemme 67** Inégalité de Poincaré

Soit  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$ , on a

$$\int_0^1 |u(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |Du(t)|^2 dt$$

**Corollaire 68** L'application  $u \mapsto \|Du\|_{L^2}$  définit sur  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$  une norme. Cette norme est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$  : pour tout  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$ , on a

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\|u\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|Du\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathcal{H}^1}$$

**Définition 69** Lorsque  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$  est solution du problème  $a(u, v) = L(v)$  issu de (†),  $u$  est dite solution faible ou une solution variationnelle de (†).

**Théorème 70** On se donne  $f \in L^2([0, 1])$  et  $q \in L^\infty([0, 1])$  avec  $q(x) \geq 0$  pour presque tout  $x \in [0, 1]$ . Alors le problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$$

admet une unique solution  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$ .

Si, de plus,  $f$  et  $q$  sont des fonctions continues, alors  $u$  est une fonction de classe  $C^2([0, 1])$  qui vérifie

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

**Remarque 71** Si la forme bilinéaire  $a$  n'est plus symétrique, on utilisera le théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 72** Théorème de Lax-Milgram

Soit  $V$  un espace de Hilbert. On considère  $a$  une forme bilinéaire continue coercive sur  $V \times V$  et  $L$  une forme linéaire sur  $V$ .

Alors il existe un unique  $u \in V$  tel que  $a(u, v) = L(v)$  pour tout  $v \in V$ .



## Questions

---

### Exercice : Inclusions des espaces $L^p$

1) Montrer que si l'espace mesuré  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  est de mesure finie, alors les espaces  $\mathcal{L}^p(X)$  sont décroissants (pour l'inclusion) avec l'exposant  $p$  (i.e.)

$$0 < p \leq p' \leq +\infty \Rightarrow \mathcal{L}^{p'}(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$$

2) Montrer que si  $I$  est un ensemble quelconque d'indices, alors les espaces  $l^p(I)$  sont croissants (pour l'inclusion) avec l'exposant  $p$  (i.e.)

$$0 < p \leq p' \leq +\infty \Rightarrow l^p(I) \subset l^{p'}(I)$$


---

*Solution :* 1) Nous allons proposer deux méthodes pour démontrer cette inclusion. L'une est plus "courte" que l'autre mais à le désavantage de ne pas montrer que l'injection est continue ...

Méthode 1 : Soient  $0 < p \leq p' \leq +\infty$ , et soit  $f \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ . Alors

$$\int_{\{f \leq 1\}} |f|^p d\mu \leq \mu(X) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\{f > 1\}} |f|^p d\mu \leq \int_{\{f > 1\}} |f|^{p'} d\mu < +\infty$$

En additionnant ces deux inégalités, on a donc  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ .

Méthode 2 : Soient  $0 < p \leq p' \leq +\infty$ , et soit  $f \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ . Posons  $\alpha = p'/p$  et  $\beta$  son exposant conjugué. Comme  $\alpha > 1$ , on peut appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \left( \int_X (|f|^p)^\alpha d\mu \right)^{1/\alpha} \left( \int_X 1^\beta d\mu \right)^{1/\beta} \leq \mu(X)^{1/\beta} \left( \int_X |f|^{p'} d\mu \right)^{1/\alpha}$$

D'où

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|f\|_{p'}$$

Par conséquent, on en déduit que l'injection

$$i : \mathcal{L}^{p'}(X) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(X) \\ f \mapsto f$$

est continue.

**Remarque :** En revanche, on n'a pas  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ , pour tous  $p \neq p'$ . En effet, si  $p < p'$ , la fonction  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1/p'}} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dans  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  car  $p/p' < 1$ , mais pas dans  $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ .

Si  $p > p'$ , la fonction  $f$  définie par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1/p'}} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dans  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  car  $p/p' > 1$ , mais pas dans  $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ .

2) Soient  $I$  est un ensemble quelconque d'indices et  $0 < p \leq p' \leq +\infty$ . Soit  $x \in l^p(I)$  non nulle. Alors, posons  $x' = x/\|x\|_p$ . On a  $\|x\|_p = 1$  (i.e.)

$$\sum_{i \in I} |x'_i|^p = 1$$

Il en résulte que  $|x'_i|^p \leq 1$ , et donc  $|x'_i| \leq 1$  pour tout  $i \in I$ . Ainsi, pour tout  $i \in I$ , on a

$$|x'_i|^{p'} \leq |x'_i|^p, \quad \text{car } p \leq p'$$

Par suite,

$$\sum_{i \in I} |x'_i|^{p'} \leq \sum_{i \in I} |x'_i|^p = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i \in I} |x_i|^{p'} \leq \|x\|_p^{p'}$$

Donc  $x \in l^{p'}(I)$  et  $\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p$ .

**Exercice :** Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $a \in \mathbb{R}$ . On rappelle que le translatée de  $f$  par  $a$  est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x - a)$$

1) Montrer que si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , alors  $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$ .

2) Montrer que si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , alors  $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$

3) Pour  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , a-t-on  $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_\infty = 0$  ?

*Solution :* 1) On a

$$\{x \in \mathbb{R} ; \tau_a f(x) \neq \tau_a g(x)\} = \{x \in \mathbb{R} ; f(x - a) \neq g(x - a)\} = a + \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq g(x)\}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue  $\lambda$  par translation entraîne que

$$\lambda(\{\tau_a f \neq \tau_a g\}) = \lambda(\{f \neq g\})$$

On peut donc définir  $\tau_a$  sur  $L^p(\mathbb{R})$  car la classe de  $\tau_a f$  modulo l'égalité presque partout ne dépend que de celle de  $f$ . Enfin, si  $1 \leq p < +\infty$ ,

$$\|\tau_a f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x - a)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p$$

Pour  $p = +\infty$ , on remarque que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \{|\tau_a f| > u\} = a + \{|f| > u\}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue  $\lambda$  par translation entraîne que

$$\|f\|_\infty := \text{supess}|f| = \inf\{M > 0 ; \lambda(|f| > M) = 0\} = \text{supess}|\tau_a f| = \|\tau_a f\|_\infty$$

2) Supposons que  $f \in C_c(\mathbb{R})$  (l'espace des fonctions continues à support compact). Alors, par le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue et ainsi, on a

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(a \leq \eta) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, |f(x - a) - f(x)| \leq \epsilon)$$

Par suite, pour  $a \leq \eta$ , on a

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x - a) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{(a + \{f \neq 0\}) \cup \{f \neq 0\}} |f(x - a) - f(x)|^p dx \\ &\leq (\lambda(a + \{f \neq 0\}) + \lambda(\{f \neq 0\})) \epsilon^p \\ &\leq 2\lambda(\overline{\{f \neq 0\}}) \epsilon^p \end{aligned}$$

Or,  $\lambda(\overline{\{f \neq 0\}})$  est fini puisque  $f$  est à support compact. Par conséquent,

$$a \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \|\tau_a f - f\|_p \leq \left(2\lambda(\overline{\{f \neq 0\}})\right)^{1/p} \epsilon$$

Supposons maintenant  $f \in L^p(\mathbb{R})$ . Comme  $C_c(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R})$ , il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C_c(\mathbb{R})$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad (\dagger)$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p &\leq \|\tau_a f - \tau_a f_n\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \\ &\leq 2\|f_n - f\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ . D'après  $(\dagger)$ , il existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|f_{n_\epsilon} - f\|_p \leq \epsilon/4$$

et par ce qui précède (puisque  $f_n \in C_c(\mathbb{R})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ), il existe  $\eta_\epsilon > 0$  tel que

$$\|\tau_a f_{n_\epsilon} - f_{n_\epsilon}\|_p \leq \epsilon/2 \quad \text{pour tout } |a| \leq \eta_\epsilon$$

Par conséquent,

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq \epsilon \quad \text{pour tout } |a| \leq \eta_\epsilon$$

D'où le résultat.

**Remarque :** Grâce à l'égalité

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_b(\tau_{a-b} f - f)\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p$$

on déduit que si  $1 \leq p < +\infty$  et  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto \tau_a f \end{aligned}$$

est uniformément continue.

3) Pour  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on n'a pas  $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_\infty = 0$ . En effet, en considérant une fonction caractéristique  $f = \chi_{[\alpha, \beta]}$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a

$$\|\tau_a f - f\|_\infty = 1 \not\rightarrow_{a \rightarrow 0} 0$$

### Exercice : Théorème de Sard en dimension 1

Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On note

$$C = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

Montrer que  $f(C)$  est une partie de mesure nulle de  $\mathbb{R}$  (*i.e.*) pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $f(C)$  est contenu dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à  $\epsilon$ .

*Solution :* Soit  $\epsilon > 0$  et un intervalle compact  $J$  de longueur  $l$  contenu dans  $I$ . Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , alors  $f'$  est continue sur  $J$ , et donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Ainsi, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour tous  $u, v \in J$ ,

$$|f'(u) - f'(v)| \leq \epsilon \quad \text{si } |u - v| \leq \frac{l}{n}$$

L'inégalité  $|u - v| \leq \frac{l}{n}$  nous incite à subdiviser l'intervalle  $J$  en  $n$  intervalles compacts  $J_1, \dots, J_n$  de longueur  $l/n$ .

Si  $C \cap J_k$  pour un certain  $k \in \{1, \dots, n\}$ , alors pour (au moins) un  $x \in C \cap J_k$ , on a  $f'(x) = 0$  et donc

$|f'(u)| \leq \epsilon$  pour tout  $u \in J_k$ .

L'inégalité de la moyenne nous donne alors

$$|f(u) - f(v)| \leq \epsilon|u - v| \leq \epsilon \frac{l}{n} \text{ si } u, v \in J_k$$

Ainsi,  $f(J_k)$  est de longueur inférieure à  $\epsilon \frac{l}{n}$ . Par suite, comme

$$f(C \cap J) \subset \bigcup_{k=1}^n f(J_k)$$

on en déduit que la longueur de  $f(C \cap J)$  est inférieure à  $\epsilon l$ . Comme  $\epsilon$  est arbitrairement petit, on en déduit que  $f(C \cap J)$  est de mesure nulle.

On peut écrire

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

où les  $I_n$  sont des intervalles compacts. D'après ce qui précède, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(C \cap I_n)$  est contenu dans une réunion finie d'intervalles dont la somme est, par exemple, inférieure à  $\epsilon/2^n$ . Ainsi, l'ensemble

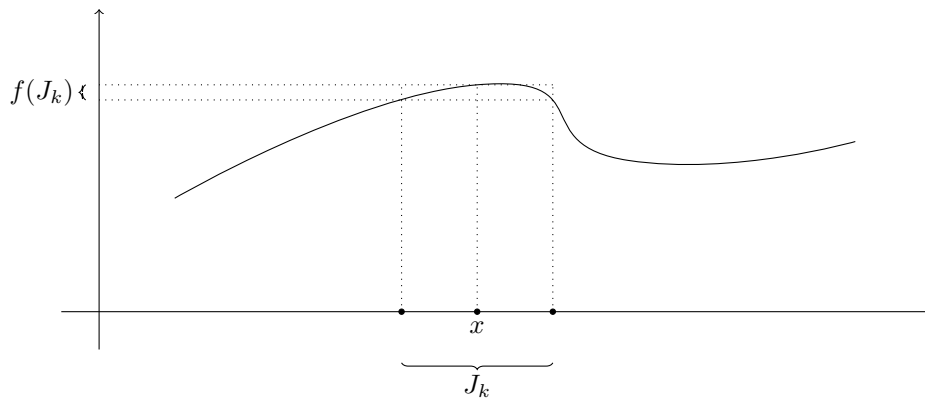
$$f(C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(C \cap I_n)$$

est contenu dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à

$$(\epsilon/2) + \dots + (\epsilon/2^n) + \dots = \epsilon$$

D'où le résultat.

**Remarque :** Le théorème assure que  $f(C)$  est "petit" sans rien dire sur l'ensemble  $C$ . En effet, en considérant une fonction constante sur  $I$ , on a bien  $C = I$  et  $f(C)$  est réduit à un point. Ce qu'il faut comprendre, c'est qu'au voisinage d'un point critique, le graphe de  $f$  est "presque horizontale", donc l'image de ce voisinage est de longueur très petite sur l'axe des ordonnées.



Graphes de  $f$  au voisinage d'un point critique  $x$