Méthode de Newton

Mohamed NASSIRI

Références :

Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière - p.152 → 156

Recasage :

● ● ● ● ● 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
● ● ● ● ● 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
● ● ● ● ○ 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Résumé :

La méthode de Newton est une méthode de résolution de l'équation $f(x) = 0$. Avec certaines

Prérequis :

Suites numériques - Formules de Taylor - Fonctions convexes

Théorème : • Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c, d]$.
Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.
Alors pour $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a.
• De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a, d]$, la méthode converge et on a :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et } x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ si } n \to +\infty$$

Démonstration.
• Comme $f(a) = 0$, $\forall x \in [c, d]$, on a :

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) + (x - a)f'(x)}{f'(x)}$$

Or par la formule de Taylor à l'ordre 2,

$$\exists z \in]a, x[\text{ tel que } F(x) - a = \frac{f''(z)(x - a)^2}{2f'(x)}$$

Soit $C = \frac{max_{x\in[c,d]} f''(x)}{2min_{x\in[c,d]} f'(x)}$, on a donc

$$|F(x) - a| \leq C|x-a|^2 \quad \forall x \in [c,d]$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $C\alpha < 1$, et assez petit pour que $I =]a-\alpha, a+\alpha[\subset [c,d]$. Alors $\forall x \in I$, on a :

$$|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha \text{ d'où } F(I) \subset I$$

Si $x_0 \in I$, on a donc $x_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et :

$$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2 \text{ d'où}$$

$$C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2n} \leq (C\alpha)^{2n}$$

et la convergence d'ordre 2 de x_n vers a puisque $C\alpha < 1$.

• Pour $a \leq x \leq d$, on a $f(x) \geq 0$ et $f'(x) > 0$, d'où

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \quad \text{(inégalité stricte si } x > a\text{)}$$

et d'autre part, on a

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x_n - a)^2 \geq 0 \quad \text{(inégalité stricte si } x > 0\text{)}$$

Par conséquent, $F([a,d]) \subset [a,d]$ et pour $x_0 \in]a,d]$, on a donc $x_n \in]a,d]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (si $x_0 = a$, la suite est constante).
Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle admet une limite l qui vérifie $F(l) = l$, donc $f(l) = l$ et l ne peut être que a.
La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a est quadratique car on a :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Or si $a < x_0 \leq d$, on a $x_n > a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \quad \text{avec } a < z_n < x_n$$

Par conséquent,

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}$$

□

Remarques :

- A
- Mises en garde sur le développement :
  Attention à ...