

# Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Mohamed NASSIRI

Après avoir introduit la définition des EDP et des *conditions au bord* (l'équivalent des conditions initiales pour les EDO), on va s'intéresser à quelques EDP particulières. L'*équation de transport* et l'*équation de Burgers*,

Equation de transport

Equation de Burgers

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)v(x, t)) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v(x, t)^2}{2} \right) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ainsi que les trois grandes classes d'EDP linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

Equation de Laplace  
(elliptique)

Equation des ondes  
(hyperbolique)

Equation de la chaleur  
(parabolique)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \pm f$$

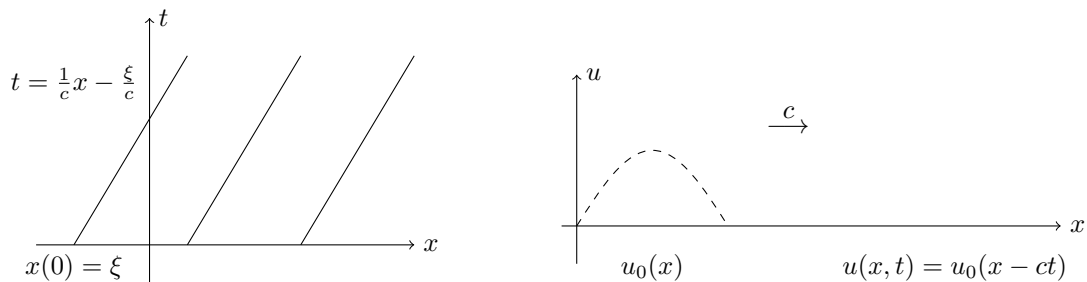
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \pm f$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = \pm f$$

Pour l'équation de transport (à vitesse constante dans un premier temps), on va introduire la *méthode des caractéristiques* et la notion de *courbe caractéristique*. L'idée est un peu étrange mais efficace comme on va le voir : on cherche les domaines où  $u$  est constante en considérant la courbe paramétrique pour  $\xi \in \mathbb{R}$  donné :

$$C_\xi = \{(x(t), t), t \in \mathbb{R} \mid x'(t) = c, x(0) = \xi\}$$

En illustrant ces fameuses courbes caractéristiques et les solutions, on obtient



Graphiquement, on voit donc bien que, à vitesse constante, le flux se déplace de façon uniforme en se traduisant à vitesse  $c$  sans modifier l'allure de la condition initiale.

Une des applications (historiquement) importantes est que la *transformation de Fourier* transforme des problèmes différentiels en problèmes algébriques ou différentiels, beaucoup plus simples à résoudre. Par exemple, l'équation de transport linéaire, l'équation de la chaleur, etc.

Une méthode de résolution méritait d'avoir une partie : la *méthode de tir*. Elle consiste à remplacer un problème elliptique par un problème de Cauchy. Plus précisément, avec  $f \in C([0, 1])$  et  $q \in C([0, 1])$  une fonction à valeurs positives. On considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{méthode de tir}} \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = k \end{cases}$$

est de montrer qu'il existe une valeur de  $u'(0) = k$  tel que  $u(1) = 0$ . Cette méthode est spécifique à la dimension 1.

Pour finir, les *espaces de Sobolev* offre une très belle application aux EDP. Notre point de départ est le suivant : Soient  $f \in L^2(]0, 1[)$  et  $q \in L^\infty(]0, 1[)$  des fonctions à valeurs positives. On considère le problème

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace  $\mathcal{H}$  des fonctions de classe  $C^2([0, 1])$  qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

avec

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert. Le génie de cette méthode n'est pas de chercher des fonctions de "façon locale" mais un espace de fonctions, donc de "façon globale". Les espaces de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  et  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$  seront solutions :

Espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$

$$\mathcal{H}^1([0, 1]) = \left\{ u \in C([0, 1]) \mid \exists g \in L^2([0, 1]), \right. \\ \left. u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)dt \right\}$$

Espace de Sobolev  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$

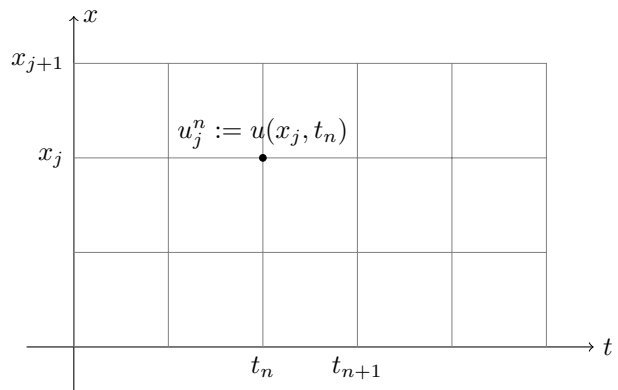
$$\mathcal{H}_0^1([0, 1]) = \{ u \in \mathcal{H}^1([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \}$$

Seul petit hic, on va devoir définir une nouvelle notion de "dérivée" : *dérivée faible*. Les fonctions solutions ne seront pas forcément de classe  $C^2([0, 1])$ . Cependant, si  $f$  et  $q$  sont des fonctions continues, alors  $u$  est une fonction de classe  $C^2([0, 1])$ . Ouf!

Pour finir, on donne un aspect numérique de résolution : *les schémas aux différences finies*. Dans un premier temps, on va discrétiser en espace et en temps. On se donne donc un pas d'espace  $\Delta x$  et pas de temps  $\Delta t$ . On pose  $x_j = j\Delta x$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $t_n = n\Delta t$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Le but de la méthode sera de trouver une approximation de  $u(x_j, t_n)$ . Dans un second temps, on remplace les dérivées partielles par des taux d'accroissement. Par exemple :

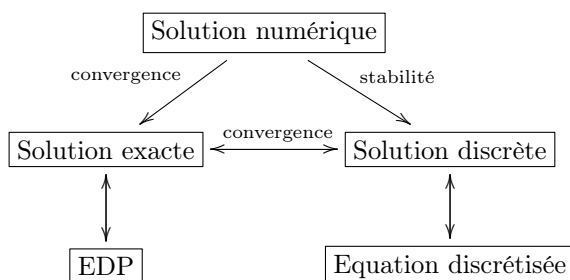
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$



Par la suite, on va devoir s'assurer du bien-fondé de ces schémas et donc assurer la convergence des solutions numériques (*i.e.*)

$$v_j^n \xrightarrow[(h,k) \rightarrow (0,0)]{(j h, n k) \rightarrow (x,t) \rightarrow 0} u(x, t)$$

Les notions de *consistance* et de *stabilité*, ainsi que le *théorème de Lax-Richtmyer* nous assurerons la convergence de certains schémas.



## Références

- [DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza  
 [NIC] Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, Serge Nicaise  
 [HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard  
 [ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amrani

## Développements

Equation de la chaleur  
 Equation de transport

## 1 Définitions et exemples

### 1.1 Définitions [NIC] p.9-10

**Définition 1** Une équation aux dérivées partielles (noté EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables (réelles)  $u$  et ses dérivées et une fonction donnée  $f$  :

$$\diamond F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f \text{ dans } \Omega$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F$  une fonction de plusieurs variables réelles.

L'ordre de dérivation le plus élevé (noté ici  $m$ ) est appelé l'ordre de l'EDP.

Si la fonction  $f$  est nulle, on dit que l'équation est homogène.

On dit que l'EDP est linéaire si  $F$  est linéaire par rapport à tous ses arguments.

**Exemple 2** Les équations suivantes sur  $\mathbb{R}^2$  sont des EDP d'ordre 1, 2 et 3 respectivement :

$$\begin{aligned} u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + e^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^3 + e^{x_1} \sin x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= 2 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

La première est une EDP linéaire et homogène, les deux autres sont non linéaires.

**Définition 3** L'équivalent des conditions initiales pour les EDO est ici la notion de conditions au bord (ou conditions aux limites) qui signifient qu'on impose que la solution  $u$  de  $\diamond$  doit satisfaire à certaines identités sur des parties du bord de  $\Omega$ .

**Exemple 4** Soit  $f \in C(]0,1[)$ . Les conditions au bord du problème suivant sont dites de type Dirichlet.

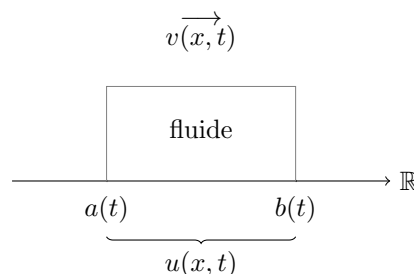
$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in ]0,1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Les conditions au bord du problème suivant sont dites de type Neumann.

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in ]0,1[ \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

### 1.2 Equation de transport [DIM] p.19 → 29

**Motivation 5** On considère un fluide en mouvement le long de l'axe des réels. On note  $u(x, t)$  son "profil densité" et  $v(x, t)$  son "profil vitesse". On travaille dans un domaine  $]a(t); b(t)[$ , d'extrémités régulières, dans son mouvement.



**Proposition 6** L'équation de transport est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)v(x, t)) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Proposition 7** L'équation de Burgers est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v(x, t)^2}{2}\right) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

### 1.3 Equations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

**Définition 8** L'équation suivante dite de Laplace est une équation elliptique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \pm f$$

**Définition 9** L'équation suivante dite des ondes (ou des cordes vibrantes) est une équation hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \pm f$$

**Définition 10** L'équation suivante dite de la chaleur est une équation parabolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = \pm f$$

## 2 Méthode des caractéristiques : résolution de l'équation de transport [DIM] p.33 → 37

**Définition 11** Considérons la courbe paramétrique pour  $\xi \in \mathbb{R}$  donné :

$$C_\xi = \{(x(t), t), t \in \mathbb{R} \mid x'(t) = c, x(0) = \xi\}$$

$C_\xi$  est dite courbe caractéristique de pied  $\xi$ .

**Théorème 12** L'équation de transport (à vitesse constante  $c$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + c \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a pour solution  $u(x, t) = u_0(x - ct)$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Théorème 13** L'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{x}{1+t^2} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x > 0 \end{cases}$$

a pour solution  $u(x, t) = u_0(xe^{-\arctan t})$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 3 Résolution par transformée de Fourier

### 3.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [ELAM2] p.109 → 122

**Proposition-Définition 14** Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la fonction

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

est continue et bornée par  $\|f\|_1$ . On l'appelle la transformée de Fourier de  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .  
L'application

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \widehat{f}$$

est linéaire et continue. On l'appelle la transformation de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

**Proposition 15** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

**Théorème 16** Formule d'échange  
Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \widehat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) g(u) du$$

**Théorème 17** La transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \widehat{f}$$

est une application injective

**Remarque 18** La transformation de Fourier conjuguée est donnée par

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{ix\xi} dx$$

**Théorème 19** Formule d'inversion

Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

**Théorème 20** Si  $f, \widehat{f}, g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors  $fg \in L^1(\mathbb{R})$  et de plus, on a

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}$$

**Théorème 21** (i) Transformation de Fourier d'une dérivée

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$  telle que  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$$

(ii) Dérivée d'une transformation de Fourier

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $\widehat{f}$  admet une dérivée  $(\widehat{f})'$  continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, (\widehat{f})'(\xi) = -i\mathcal{F}(xf)(\xi)$$

### 3.2 Equation de transport [DIM] p.35-36

**Méthode 22** En appliquant la transformation de Fourier à l'équation de transport (à vitesse constante  $c$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + c \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \widehat{u}(\xi, t) + ic\xi \widehat{u}(\xi, t) = 0 & \xi \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On trouve donc

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-ic\xi t} \widehat{u_0}(\xi)$$

et ainsi on retrouve, par la formule d'inversion, la solution  $u(x, t) = u_0(x - ct)$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### 3.3 Equation de la chaleur [ELHAJ] p.264 → 266

**Théorème 23** *Le problème*

$$(c) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

a pour solution

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy$$

### 3.4 Equation des ondes [DIM] p.53 → 56

**Théorème 24** *Le problème*

$$(c) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}, u_1 \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

a pour solution

$$u(t, x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\tau) d\tau$$

## 4 Méthode de tir [HUB2] p.108 → 111

**Méthode 25** *Soient  $f \in C([0, 1])$  et  $q \in C([0, 1])$  une fonction à valeurs positives. On considère le problème*

$$(\dagger) \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La méthode de tir consiste à remplacer le problème  $(\dagger)$  par le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = k \end{cases}$$

est de montrer qu'il existe une valeur de  $u'(0) = k$  tel que  $u(1) = 0$ .

Cette méthode est spécifique à la dimension 1.

**Remarque 26** *On va supposer que la fonction  $q$  est constante.*

**Théorème 27** *Soient  $f \in C([0, 1])$  et  $q \geq 0$ . Le problème  $(\dagger)$  admet une et une seule solution donnée par*

$$u(x) = - \int_0^x \int_0^t f(y) dy dt + x \int_0^1 \int_0^t f(y) dy dt$$

si  $q = 0$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^x \sinh((y-x)\sqrt{q}) f(y) dy - \frac{\sinh(x\sqrt{q})}{\sinh(\sqrt{q})} \int_0^1 \sinh((y-1)\sqrt{q}) f(y) dy$$

si  $q > 0$

## 5 Espaces de Sobolev $\mathcal{H}^1([0, 1])$ et $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$ [HUB2] p.111 → 122

**Motivation 28** *Soient  $f \in L^2([0, 1])$  et  $q \in L^\infty([0, 1])$  des fonctions à valeurs positives. On considère le problème*

$$(\dagger\dagger) \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace  $\mathcal{H}$  des fonctions de classe  $C^2([0, 1])$  qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

a est une forme bilinéaire symétrique définie par

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x) dx$$

et L est une forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert.

**Définition 29** *On appelle espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$ , l'espace de fonctions défini, sur l'intervalle  $[0, 1]$  par*

$$\mathcal{H}^1([0, 1]) = \left\{ u \in C([0, 1]) \mid \exists g \in L^2([0, 1]), \right. \\ \left. u(x) = u(0) + \int_0^x g(t) dt \right\}$$

On appelle espace de Sobolev  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$ , le sous-espace de  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  défini par

$$\mathcal{H}_0^1([0, 1]) = \{ u \in \mathcal{H}^1([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \}$$

**Remarque 30** *Cette définition est propre à la dimension 1.*

**Proposition 31** Soit  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$ , il existe une unique fonction  $g \in L^2([0, 1])$  telle que

$$u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)dt$$

**Définition 32** La fonction  $g$  est alors notée  $Du$  et est appelée dérivée faible de  $u$ .

**Remarque 33** Si  $u \in C^1([0, 1])$ , alors  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$ , et  $Du = u'$ .

**Remarque 34** Soit  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$ , alors pour toute fonction  $\phi \in C_c^1([0, 1])$ ,

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 Du(x)\phi(x)dx$$

Et réciproquement, si  $u \in \mathcal{H}^1([0, 1])$  et qu'il existe  $g \in L^2([0, 1])$  telle que pour toute fonction  $\Phi \in C_c^1([0, 1])$ ,

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 g(x)\phi(x)dx$$

alors  $g = Du$ .

**Proposition 35** (i) L'application  $\phi$  définie par

$$\phi(u, v) = \int_0^1 u(t)v(t)dt + \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt$$

pour tout  $u, v \in L^2([0, 1])$ , est un produit scalaire sur  $\mathcal{H}^1([0, 1])$ . On le notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

(ii) Muni de la norme (associé au produit scalaire) :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1} = \left( \int_0^1 |u(t)|^2 dt + \int_0^1 |Du(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{H}^1([0, 1])$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 36** Les fonctions de l'espace  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  sont höldériennes de rapport  $\frac{1}{2}$  : pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^2} |x - y|^{\frac{1}{2}}$$

où  $\|\cdot\|_{L^2}$  désigne la norme dans l'espace  $L^2([0, 1])$ . De plus, l'espace  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  s'injecte de façon continue dans l'espace  $C([0, 1])$  /

$$\|u\|_{\infty} \leq \sqrt{2}\|u\|_{\mathcal{H}^1}$$

**Proposition 37** L'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  s'injecte de façon compacte dans les espaces  $C([0, 1])$  et  $L^2([0, 1])$ .

**Remarque 38** L'espace  $\mathcal{H}^1([0, 1])$  coïncide avec l'espace

$$\{u \in L^2([0, 1]) \mid Du \in L^2([0, 1])\}$$

où  $Du$  est la dérivée faible de  $u$ .

**Proposition 39** L'espace  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}^1([0, 1])$ , c'est donc un espace de Hilbert réel.

**Lemme 40** Inégalité de Poincaré

Soit  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$ , on a

$$\int_0^1 |u(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |Du(t)|^2 dt$$

**Corollaire 41** L'application  $u \mapsto \|Du\|_{L^2}$  définit sur  $\mathcal{H}_0^1([0, 1])$  une norme. Cette norme est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$  : pour tout  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$ , on a

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\|u\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|Du\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathcal{H}^1}$$

**Définition 42** Lorsque  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$  est solution du problème  $a(u, v) = L(v)$  issu de  $(\dagger\dagger)$ ,  $u$  est dite solution faible ou une solution variationnelle de  $(\dagger\dagger)$ .

**Théorème 43** On se donne  $f \in L^2([0, 1])$  et  $q \in L^\infty([0, 1])$  avec  $q(x) \geq 0$  pour presque tout  $x \in [0, 1]$ . Alors le problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$$

admet une unique solution  $u \in \mathcal{H}_0^1([0, 1])$ .

Si, de plus,  $f$  et  $q$  sont des fonctions continues, alors  $u$  est une fonction de classe  $C^2([0, 1])$  qui vérifie

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

**Remarque 44** Si la forme bilinéaire  $a$  n'est plus symétrique, on utilisera le théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 45** Théorème de Lax-Milgram

Soit  $V$  un espace de Hilbert. On considère  $a$  une forme bilinéaire continue coercive sur  $V \times V$  et  $L$  une forme linéaire sur  $V$ .

Alors il existe un unique  $u \in V$  tel que  $a(u, v) = L(v)$  pour tout  $v \in V$ .

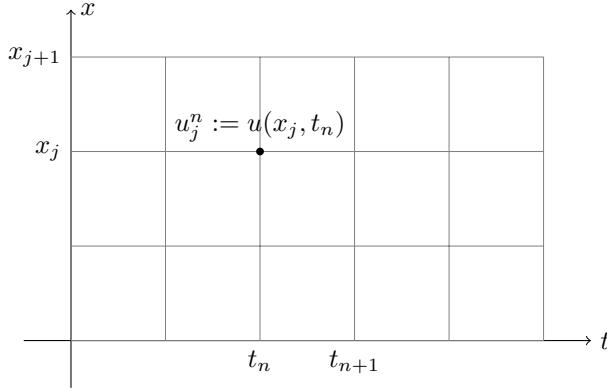
## 6 Schémas aux différences finies

### 6.1 Principe [DIM] p.91 → 93

**Méthode 46** Dans un premier temps, on va discrétiser en espace et en temps. On se donne donc un pas d'espace  $\Delta x$  et pas de temps  $\Delta t$ .

On pose  $x_j = j\Delta x$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $t_n = n\Delta t$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Le but de la méthode sera de trouver une approximation de  $u(x_j, t_n)$ .



Dans un second temps, on remplace les dérivées partielles par des taux d'accroissement. Par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Pour  $n = 0$ , on fait  $u_j^0 = u_0(x_j)$ . On rappelle que l'on connaît  $u_0(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 47** Le choix d'un certain "type de taux d'accroissement" nous donnera plusieurs schémas :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad \text{Euler explicite}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \quad \text{Euler implicite}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{décentré à droite}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad \text{décentré à gauche}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{centré}$$

## 6.2 Consistance et stabilité [DIM] p.95 → 97

**Définition 48** Le schéma aux différences finies  $P_{k,h}v = 0$  est dit consistant avec le problème  $Pu = 0$  si pour toute fonction régulière  $\phi = \phi(x, t)$ , on a

$$P\phi - P_{k,h}\phi \xrightarrow[k \rightarrow 0, h \rightarrow 0]{} 0$$

La convergence étant au sens ponctuel en chacun des points de discrétisation.

**Définition 49** Le schéma aux différences finies  $P_{k,h}v = 0$  consistant avec le problème  $Pu = 0$  est dit précis à l'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace si pour toute fonction régulière  $\phi = \phi(x, t)$  tel que  $P\phi = 0$ , on a

$$P\phi - P_{k,h}\phi = \mathcal{O}(k^p) + \mathcal{O}(h^q)$$

**Exemple 50** On considère le schéma explicite décentré à droite en espace :

$$(P_{k,h}v)_j^n = \frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{c}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n)$$

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

alors, on a

$$(P_{k,h}\phi)_j^n = (P\phi)_j^n + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{ch}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2)$$

Ainsi, le schéma est consistant avec le problème  $Pu = 0$  et précis à l'ordre 1 en temps et 1 en espace.

**Exemple 51** On considère le schéma de Lax-Wendroff :

$$(P_{k,h}v)_j^n = \frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{c}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{c^2 k}{2h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

alors, on a

$$(P_{k,h}\phi)_j^n = (P\phi)_j^n + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{k^2}{6} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(k^3) + \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4) - \frac{ck^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(kh^2) = (P\phi)_j^n + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2) = (P\phi)_j^n + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2)$$

Ainsi, le schéma est consistant avec le problème  $Pu = 0$  et précis à l'ordre 2 en temps et 2 en espace.

**Définition 52** Un schéma aux différences finies à un pas  $P_{k,h}v = 0$  utilisé pour la résolution numérique de  $Pu = 0$  est dit convergent si pour toute solution  $u$  de  $Pu = 0$ , on a

$$v_j^n \xrightarrow[(h,k) \rightarrow (0,0)]{(jh, nk) \rightarrow (x,t) \rightarrow 0} u(x, t)$$

dès que

$$v_j^0 \xrightarrow[h \rightarrow 0]{jh \rightarrow x \rightarrow 0} u_0(x)$$

**Définition 53** On se donne un temps final  $T = Nk$  et on munit l'espace  $V$  des suites  $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  d'une norme  $\|\cdot\|$ . Un schéma sera dit stable si l'on a

$$\|v^n\| \leq C_T \|v^0\|, \quad 0 \leq n \leq N$$

pour la suite  $v^n = (v_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $V$  calculée par le schéma aux différences finies.

**Théorème 54** Théorème de Lax-Richtmyer  
Un schéma consistant à un pas est convergent si et seulement s'il est stable en norme  $\|\cdot\|$ .

## Questions

---

### Exercice : Méthode de tir

Soient  $f \in C([0, 1])$  et  $q \in \mathbb{R}_+$ . On considère le problème

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

En considérant le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = k \end{cases}$$

montrer, par la méthode de tir, le problème  $(\dagger)$  admet une et une seule solution donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_0^x \int_0^t f(y) dy dt + x \int_0^1 \int_0^t f(y) dy dt && \text{si } q = 0 \\ u(x) &= \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^x \sinh((y-x)\sqrt{q}) f(y) dy - \frac{\sinh(x\sqrt{q})}{\sinh(\sqrt{q})} \int_0^1 \sinh((y-1)\sqrt{q}) f(y) dy && \text{si } q > 0 \end{aligned}$$

*Solution :* • Supposons  $q = 0$ . On a donc

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = k \end{cases}$$

On obtient facilement que

$$u(x) = kx - \int_0^x \int_0^t f(y) dy dt$$

Par conséquent, il existe une et une seule valeur de  $k$  pour laquelle  $u(1) = 0$  qui est donnée par

$$k = \int_0^1 \int_0^t f(y) dy dt$$

• Supposons  $q > 0$ . Ramenons nous à un système d'équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} -u' = -v \\ v' = -qu + f \\ u(0) = 0 \\ v(0) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}$$

La solution de l'équation homogène est donnée par :

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = e^{Ax} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

On applique la méthode de la variation de la constante et on cherche des solutions sous la forme

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = e^{Ax} \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}$$

On obtient donc

$$e^{Ax} \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$



Pour continuer, on a besoin de calculer  $e^{-Ax}$ . On diagonalise  $A$  pour que ce soit plus simple. On a donc  $D = P^{-1}AP$  avec

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & -\sqrt{q} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{q}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{q}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{q} & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} e^{-Ax} &= P^{-1} \begin{pmatrix} e^{-x\sqrt{q}} & 0 \\ 0 & e^{x\sqrt{q}} \end{pmatrix} P \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{x\sqrt{q}} + e^{-x\sqrt{q}} & \frac{1}{\sqrt{q}}(e^{x\sqrt{q}} + e^{-x\sqrt{q}}) \\ \sqrt{q}(e^{x\sqrt{q}} + e^{-x\sqrt{q}}) & e^{x\sqrt{q}} + e^{-x\sqrt{q}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}' = e^{-Ax} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} \sinh(x\sqrt{q}) \\ \cosh(x\sqrt{q}) f(x) \end{pmatrix}$$

Comme  $u(0) = u_0(0) = 0$  et  $v(0) = v_0(0) = -k$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^x \sinh(y\sqrt{q}) f(y) dy \\ v_0(x) &= -k + \int_0^x \cosh(y\sqrt{q}) f(y) dy \end{aligned}$$

et

$$u(x) = \cosh(x\sqrt{q})u_0(x) - \frac{1}{\sqrt{q}} \sinh(x\sqrt{q})v_0(x)$$

Par conséquent, on a

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^x \sinh((y-x)\sqrt{q}) f(y) dy + k \frac{1}{\sqrt{q}} \sinh(x\sqrt{q})$$

De plus, l'application

$$k \mapsto u(1) = \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^1 \sinh((y-1)\sqrt{q}) f(y) dy + k \frac{1}{\sqrt{q}} \sinh(\sqrt{q})$$

est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, il existe bien une valeur de  $k$  pour laquelle  $u(1) = 0$  et on obtient bien

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^x \sinh((y-x)\sqrt{q}) f(y) dy - \frac{\sinh(x\sqrt{q})}{\sinh(\sqrt{q})} \int_0^1 \sinh((y-1)\sqrt{q}) f(y) dy$$

### Exercice : Schéma de Lax-Wendroff

On considère le schéma de Lax-Wendroff :

$$\begin{aligned} (P_{k,h}v)_j^n &= \frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{c}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{c^2k}{2h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \\ Pu &= \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Montrer que le schéma est consistant avec le problème  $Pu = 0$  et précis à l'ordre 2 en temps et 2 en espace.

*Solution* : Tout repose sur les développements de Taylor. En effet, on a

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= v(x_j, t_{n+1}) = v(x_j, t_n + k) \\
&= v(x_j, t_n) + k \frac{\partial}{\partial t} v(x_j, t_n) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x_j, t_n) + \mathcal{O}(k^3) \\
&= v_j^n + k \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_j^n + \frac{k^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{k^3}{6} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(k^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{j+1}^n &= v(x_{j+1}, t_n) = v(x_j + h, t_n) \\
&= v(x_j, t_n) + h \frac{\partial}{\partial x} v(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x_j, t_n) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x_j, t_n) + \mathcal{O}(h^4) \\
&= v_j^n + h \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^3}{6} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{j-1}^n &= v(x_{j-1}, t_n) = v(x_j - h, t_n) \\
&= v(x_j, t_n) - h \frac{\partial}{\partial x} v(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x_j, t_n) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x_j, t_n) + \mathcal{O}(h^4) \\
&= v_j^n - h \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{h^3}{6} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient, en remplaçant dans le schéma :

$$\begin{aligned}
(P_{k,h}v)_j^n &= \frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{c}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{c^2k}{2h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \\
&= \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_j^n + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{k^2}{6} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(k^3) \\
&\quad + c \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_j^n + \frac{ch^2}{6} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^3) \\
&\quad - \frac{c^2k}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(kh^2) \\
&= (Pv)_j^n + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

A priori, il n'y a aucune raison pour que  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$  et donc, à ce stade, on conclurait que le schéma de Lax-Wendroff est consistant avec le problème  $Pu = 0$  et précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace. Mais justement, si on a  $v$  régulière avec  $Pv := \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , on a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Par suite, on a donc

$$(P_{k,h}v)_j^n = (Pv)_j^n + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2)$$

Par conséquent, le schéma de Lax-Wendroff est consistant avec le problème  $Pu = 0$  et précis à l'ordre 2 en temps et 2 en espace.