

# Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

## Références

- [CIA] Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Philippe Ciarlet
- [DUM] Modélisation à l'oral de l'Agrégation : Calcul scientifique, Laurent Dumas
- [FILB] Analyse numérique : Algorithmes et étude mathématique, Francis Filbet
- [HUB1] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
- [DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠

## Développements

Convergence des méthodes itératives  
Méthode du gradient à pas optimal

Dans cette leçon,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Généralités [CIA] p.8 → 17

### 1.1 Normes matricielles

**Définition 1** Une norme matricielle est une application

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{K}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$  et  $\|A\| \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,
- (ii)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- (iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- (iv)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Proposition-Définition 2** Etant donné une norme vectorielle  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{K}^n$ , l'application

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ \|v\| \leq 1}} \|Av\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$$

est une norme matricielle, appelé norme matricielle subordonnée (à la norme vectorielle  $\|\cdot\|$ ).

**Théorème 3** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$\|A\|_1 = \sup_{v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

### 1.2 Rayon spectral

**Définition 4** En notant  $\lambda_i(A), 1 \leq i \leq n$ , les valeurs propres d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , le rayon spectral de  $A$  est le nombre positif défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)| ; i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

**Théorème 5** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sup_{v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(\overline{A}A)} \\ &= \sqrt{\rho(A\overline{A})} = \|\overline{A}\|_2 \end{aligned}$$

La norme  $\|\cdot\|_2$  est invariante par transformation unitaire (i.e.) soit  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $U\overline{U} = I_n$ , alors pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a

$$\|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|\overline{U}AU\|_2$$

Par ailleurs, si la matrice  $A$  est normale (i.e.)  $\overline{A}A = A\overline{A}$  alors

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

**Théorème 6** (i) Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée ou non. Alors

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

(ii) Etant donné  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\epsilon > 0$ , il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$$

**Théorème 7** *L'application*

$$\|\cdot\|_E : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (a_{i,j}) \mapsto \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} = (\text{Tr}(\bar{A}A))^{1/2}$$

est une norme matricielle non subordonnée (pour  $n \leq 2$ ) invariante par transformation unitaire et qui vérifie, pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

**Théorème 8** (i) Soient  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée, et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$\|B\| < 1$$

Alors la matrice  $(I + B)$  est inversible, et

$$\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

(ii) Si une matrice de la forme  $(I + B)$  est singulière, alors nécessairement

$$\|B\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle subordonnée ou non.

**Théorème 9** Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$$

(ii)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k v = 0, \text{ pour tout vecteur } v$$

(iii)

$$\rho(B) < 1$$

(iv)

$$\|B\| < 1, \text{ pour au moins une norme matricielle subordonnée } \|\cdot\|$$

### 1.3 Conditionnement

**Définition 10** Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée et  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Le nombre

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

s'appelle le conditionnement de la matrice A, relativement à la norme matricielle subordonnée  $\|\cdot\|$ .

**Théorème 11** Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et soit  $u$  et  $u + \delta u$  les solutions des systèmes linéaires

$$Au = b$$

$$A(u + \delta u) = b + \delta b$$

On suppose  $b \neq 0$ . Alors on a

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

**Théorème 12** Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et soit  $u$  et  $u + \Delta u$  les solutions des systèmes linéaires

$$Au = b$$

$$(A + \Delta A)(u + \Delta u) = b$$

On suppose  $b \neq 0$ . Alors on a

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u + \Delta u\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

**Théorème 13** (i) Pour toute matrice  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\text{cond}(A) \geq 1$$

$$\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$$

$$\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A), \forall \alpha \in \mathbb{K}^*$$

(ii) Pour toute matrice  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\text{cond}_2(A) := \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$$

où  $\mu_1(A) > 0$  et  $\mu_n(A) > 0$  sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de  $A$ .

(iii) Pour toute matrice  $A$  normale,

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{i \in [1,n]} |\lambda_i(A)|}{\min_{i \in [1,n]} |\lambda_i(A)|}$$

où  $\lambda_i(A)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , les valeurs propres d'une matrice  $A$ .

(iv) Pour toute matrice  $A$  unitaire ou orthogonale  $\text{cond}_2(A) = 1$ .

(v) Le conditionnement  $\text{cond}_2$  est invariant par transformation unitaire.

## 2 Résolution de systèmes linéaires

### 2.1 Méthodes directes

#### 2.1.1 Méthode de Gauss [CIA] p.73 → 82

**Méthode 14** La méthode de Gauss est une méthode générale de résolution d'un système linéaire  $Au = b$  ( $A$  une matrice inversible). Elle comporte trois étapes :

(i) Élimination : Déterminer une matrice inversible  $M$  telle que  $MA$  soit triangulaire supérieure.

(ii) Calcul simultanée de  $Mb$

(iii) Résolution du système linéaire

$$MAu = Mb$$

par la méthode dite de remontée.

**Théorème 15** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Il existe au moins une matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $MA$  soit triangulaire supérieure.

### 2.1.2 Factorisation LU [CIA] p.82 → 86

**Théorème 16** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que les  $n$  sous-matrices diagonales

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

soient inversibles.

Alors il existe une matrice triangulaire inférieure  $L = (l_{i,j})$  avec  $l_{i,i} = 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ , et une matrice triangulaire supérieure  $U$  telles que

$$A = LU$$

De plus, une telle factorisation est unique.

**Théorème 17** Soit

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale. On définit la suite

$$\begin{cases} \delta_0 = 1, \delta_1 = b_1 \\ \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}, \quad 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

Alors

$$A_k = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & a_k & b_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

et, si  $\delta_k \neq 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ , la factorisation LU de la matrice  $A$  est  $A = LU$  avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2 \frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & & \\ & a_3 \frac{\delta_1}{\delta_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & & \\ & \frac{\delta_3}{\delta_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

### 2.1.3 Factorisation et méthode de Cholesky [CIA] p.87 → 90

**Théorème 18** Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Alors il existe au moins une matrice triangulaire inférieure  $B$  telle que

$$A = B^t B$$

De plus, on peut imposer que éléments diagonaux  $B$  soient tous strictement positifs et la factorisation  $A = B^t B$  correspondante est alors unique.

### 2.1.4 Factorisation QR [FILB] p.34 → 37

**Définition 19** Soit  $u \in \mathbb{R}^n$ . On appelle matrice de Householder la matrice

$$H_u = I_n - 2 \frac{u^t u}{\|u\|^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où  $\|u\|^2 = {}^t u u$  lorsque  $u$  est non nul, et  $H_u = I_n$  lorsque  $u = 0$ .

**Proposition 20** Soit  $u \in \mathbb{R}^n$ .

(i)  $H_u$  est symétrique (i.e.)  $H_u = {}^t H_u$

(ii)  $H_u$  est inversible et  $H_u^{-1} = H_u$

(iii)  $H_u v = -v$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  colinéaire à  $u$  et  $H_u v = v$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  orthogonal à  $u$ .

(iv)  $\det(H_u) = -1$  lorsque  $u \neq 0$  et  $\det(H_u) = 1$  lorsque  $u = 0$ .

En définitive,  $H_u$  est la matrice de la réflexion d'hyperplan  $\text{Vect}(u)^\perp$

**Proposition 21** Pour tout  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  tel que  $\|v\| = 1$ , il existe  $u \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$H_u v = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^\perp$$

**Théorème 22** Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice triangulaire supérieure  $R$  telles que  $A = QR$ .

## 2.2 Méthodes itératives

**Définition 23** Si  $(M, N) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est tel que l'on a la décomposition dite décomposition régulière  $A = M - N$ , on dit que la méthode itérative associée à  $(M, N)$  converge si pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ , la suite de premier terme  $u_0$  et définie par  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{k+1} = M^{-1}(N u_k + b)$$

converge. [DUM] p.167-168

**Remarque 24** On utilise parfois la notation suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & & \ddots & -F & \\ & \ddots & D & \ddots & \\ -E & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$$

**Exemple 25** Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation :

Voir Tableau 1 [CIA] p.102

**Théorème 26** ♠ Convergence des méthodes itératives ♠ La méthode itérative associée à  $(M, N)$  converge si et seulement si  $\rho(M^{-1}N) < 1$ . [DUM] p.167 → 169

**Théorème 27** Soit  $A$  une matrice hermitienne symétrique définie positive, décomposée sous la forme

$$A = M - N, \quad M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

Si la matrice  $(\overline{M} + N)$  est définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

[CIA] p.102-103

**Théorème 28** Soit  $A$  une matrice hermitienne symétrique définie positive. La méthode de relaxation converge si  $0 < \omega < 2$ .

Le rayon spectral de la méthode de relaxation vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|, \quad \omega \neq 0$$

Par conséquent, la méthode de relaxation ne peut converger que si  $0 < \omega < 2$ . [CIA] p.103-105

### 2.3 Méthode de gradient [DIM] p.208 → 212

**Théorème 29** Soient  $A$  une matrice symétrique définie positive,  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors les problèmes

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax = b$$

et

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$$

avec  $f(y) = \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$

sont équivalents.

**Définition 30** Pour une matrice  $A$  symétrique définie positive, l'algorithme itératif

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \quad r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k Ar^k \\ \alpha_k = \frac{\|r^k\|^2}{\langle Ar^k, r^k \rangle} \end{cases}$$

est appelé méthode du gradient à pas optimal.

**Théorème 31** ♠ La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour toute matrice symétrique définie positive.

**Lemme 32** ♠ Inégalité de Kantorovitch ♠ Soient  $A$  une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Alors, pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a l'inégalité

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4$$

## 3 Recherche d'éléments propres

**Proposition-Définition 33** Théorème de Gershgöring

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors

$$\text{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$$

où

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}$$

sont les disques de Gershgöring. [HUB1] p.226

**Théorème 34** Soit  $A$  une matrice diagonalisable,  $P$  une matrice telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_i)$$

et  $\|\cdot\|$  une norme matricielle telle que

$$\|\|\text{diag}(\lambda_i)\|\| = \max_{i \in [1, n]} |\lambda_i|$$

pour toute matrice diagonale. Alors, pour toute matrice  $\delta A$ ,

$$\text{sp}(A + \delta A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$$

où  $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda_i| \leq \text{cond}(P) \|\|\delta A\|\|\}$ . [CIA] p.34-35

**Proposition 35** Méthode de la puissance  
Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de valeurs propres

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

Prenons un vecteur  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  et considérons la suite

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|}, \quad x_1 = \frac{Ax_0}{\|Ax_0\|}, \dots, \quad x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|}$$

Soit  $v_1, \dots, v_n$  une base orthonormée de trisagonalisation de  $A$  telle que  $Av_1 = \lambda_1 v_1$ .

Alors si  $x \notin \text{Vect}(v_2, \dots, v_n)$ , la suite de vecteurs  $x_{2k}$  converge vers un vecteur unitaire qui est vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_1$  [HUB1] p.24-25

**Méthode 36** Soit  $A := A_1$  une matrice carrée quelconque ; on écrit sa factorisation  $QR$ , soit

$$A_1 = Q_1 R_1$$

, puis on forme la matrice

$$A_2 = R_1 Q_1$$

on écrit sa factorisation  $QR$  de la matrice  $A_2$ , soit

$$A_2 = Q_2 R_2$$

puis on forme la matrice

$$A_3 = R_2 Q_2$$

et ainsi de suite ... On obtient ainsi une suite de matrices  $A_k$  qui sont toutes semblables à la matrice  $A$ . [CIA] p.123-124

**Proposition 37** On suppose  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et que ses valeurs propres sont toutes de modules différentes. Il existe donc au moins  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$A = PDP^{-1},$$

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \text{ et}$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

et que l'on suppose que  $P^{-1}$  admet une décomposition  $LU$ . Alors la suite de matrices  $(A_k)_{k \geq 1}$  est telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k)_{ii} = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k)_{ij} = 0, \quad 1 \leq j < i \leq n$$

[CIA] p.124-129

## Illustrations

Nom de la méthode	Décomposition $A = M - N$	Matrice $M^{-1}N$ de la méthode itérative	Description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E + F)$	$J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E + F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D - E) - F$	$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$	$(D - E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation ( $\omega \neq 0$ )	$A = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$

Tableau 1 : Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation

## Questions

**Exercice :**

---

---

*Solution :*

---

**Exercice :**

---

*Solution :*

---

**Exercice :**

---

*Solution :*

