Développement asymptotique de la série harmonique

Mohamed NASSIRI

Références :

Analyse 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas - p.145-147

Recasage :

• • • • • 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
• • • • • 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Résumé :

Prérequis :

Théorème : On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
Alors le développement asymptotique de H_n à quatre termes est :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{où } \gamma \text{ est la constante d'Euler}$$

Démonstration.
• Soit $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes :
- La différence $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et converge vers 0.
- $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante car $u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$
- $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante car $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$.

Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont donc adjacentes, et convergent vers un réel γ. Comme $v_2 = 1 - \ln 2 > 0$, on a $\gamma > 0$.
On vient de montrer que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ pour $n \to +\infty$

• Posons $t_n = u_n - \gamma$. Alors, on a :

$$t_n - t_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

Donc la série $\sum(t_k - t_{k-1})$ converge. Le théorème de sommation des équivalents nous donne

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} t_k - t_{k-1} = -t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

(en effet, $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Ici, $\alpha = 2$) Donc

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

• Posons $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 1$.
La somme $\sum_{k=n+1}^{\infty}(w_k - w_{k-1})$ vaut $-w_n$ et son terme général s'écrit :

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n+1} &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} \\
&= \cancel{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-1/n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}
\end{aligned}$$

Le théorème de sommation des équivalents nous donne :

$$-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

Par conséquent,

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

□

Remarques :

- sommation equivalent et dessin intégrale
- Mises en garde sur le développement :
  Attention à ...