Projection sur un convexe fermé

Mohamed NASSIRI

Recasage :

●●●●● 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
●●●●● 213 : Espaces de Hilbert . Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
●●●●○ 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
●●●●○ 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
●●●●○ 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Résumé :

Le théorème de projection sur un convexe fermé est un théorème important dans la théorie des espaces de Hilbert. Il faut avoir en tête que les espaces de Hilbert sont une généralisation des espaces euclidiens en dimension infinie. Ces espaces sont surtout importants car on peut y faire de la géométrie ...

Prérequis :

Espaces de Hilbert - Convexité

Théorème : Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.
Alors $\forall f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||f-u|| = \min_{v \in K} ||f-v|| \qquad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \;\text{ et }\; \langle f-u, v-u \rangle \leq 0 \;\forall v \in K \qquad (ii)$$

Démonstration.
Existence :
Soit (v_n) une suite minimisante pour (i). En d'autres termes, $v_n \in K$ et $d_n = ||f-v_n|| \longrightarrow d = \inf_{v \in K} ||f-v||$ (pr définition de l'inf, cette suite minimisante existe ...)

Montrons que (v_n) est de Cauchy :
Rappelons l'identité du parallélogramme, $\forall a, b \in H$:

$$\frac{1}{2}(||a||^2 + ||b||^2) = \left|\left|\frac{a+b}{2}\right|\right|^2 + \left|\left|\frac{a-b}{2}\right|\right|^2$$

En appliquant cette identité à $a = f - v_n$ et $b = f - v_m$, on obtient :

$$\frac{1}{2}(||d_n||^2 + ||d_m||^2) = \left|\left| f - \underbrace{\frac{v_n + v_m}{2}}_{\in K} \right|\right|^2 + \left|\left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|\right|^2$$

et donc $\left|\left| f - \frac{v_n+v_m}{2} \right|\right| \geq d$. Par conséquent, on obtient :

$$\left|\left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|\right|^2 \leq \frac{1}{2}(||d_n||^2 + ||d_m||^2) - d^2 \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \blacklozenge$$

Ainsi, $\lim\limits_{n,m\to+\infty} ||v_n - v_m|| = 0$ et donc (v_n) est de Cauchy dans K, qui est complet (car c'est un fermé dans un complet), donc $v_n \to u \in K$ et on a $d = |f - u|$ par l'inégalité $\blacklozenge$.

Montrons que $(i) \Leftrightarrow (ii)$ *:*
$\Rightarrow$: Soit $u \in K$ vérifiant (i) et soit $w \in K$. On pose $v = (1-t)u + tw \in K$ pour $t \in]0, 1]$, et donc, on a :

$$\begin{aligned} ||f - u|| &\leq ||f - [(1-t)u + tw]|| \quad \text{car } u \text{ vérifie } ||f - u|| = \min_{v\in K} ||f - v|| \\ &\leq ||(f - u) - t(w - u)|| \end{aligned}$$

Par suite,

$$||f - u||^2 \leq ||f - u||^2 - 2t\langle f - u, w - u\rangle + t^2||w - u||^2$$

d'où,

$$2\langle f - u, w - u\rangle \leq t||w - u||^2$$

En faisant $t \to 0$, on obtient (ii).

$\Leftarrow$: Inversement, soit u vérifiant (ii). Alors on a, $\forall v \in K$:

$$\begin{aligned} ||u - f||^2 - ||v - f||^2 &= \langle u - f, u - f\rangle - \langle v - f, v - f\rangle \\ &= ||u||^2 - 2\langle u, f\rangle + \cancel{||f||^2} - ||v||^2 - 2\langle v, f\rangle + \cancel{||f||^2} \\ &= ||u||^2 - ||v||^2 + 2\langle v - u, f\rangle \\ &= ||u||^2 - ||v||^2 + 2\langle v - u, f - u\rangle - 2\langle v - u, u\rangle \\ &= ||u||^2 - ||v||^2 + 2\langle v - u, f - u\rangle - 2\langle v, u\rangle - 2||u||^2 \\ &= 2\underbrace{\langle v - u, f - u\rangle}_{\leq 0 \text{ par hypothèse}} - ||u - v||^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Unicité :
Soient u_1 et u_2 vérifiant (ii). On a donc :

$$\langle f - u_1, v - u_1\rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K \qquad (\bigstar)$$

$$\langle f - u_2, v - u_2\rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K \qquad (\bigstar\bigstar)$$

En prenant $v = u_2$ dans $(\bigstar)$ et $v = u_1$ dans $(\bigstar\bigstar)$, puis en sommant les deux relations obtenues, on a :

$$\begin{aligned} & \langle f - u_1, u_2 - u_1\rangle + \langle f - u_2, u_1 - u_2\rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \langle \cancel{f} - u_1 - \cancel{f} + u_2, u_1 - u_2\rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & ||u_1 - u_2||^2 \leq 0 \end{aligned}$$

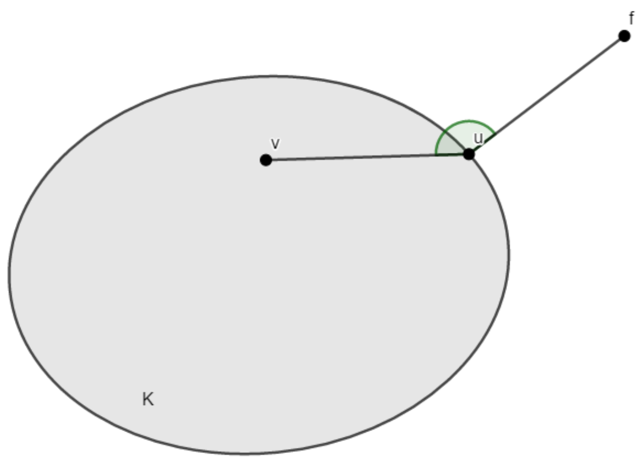
Donc $u_1 = u_2$. $\square$

Remarques :

- La condition (ii) exprime tout simplement le fait que l'angle $(\widehat{f-u, v-u})$ est obtu. En effet, comme le rappelle la bonne vieille formule du produit scalaire, on a :

$$\langle f-u, v-u\rangle = ||f-u||\ ||v-u||\ \cos(\widehat{f-u, v-u})$$

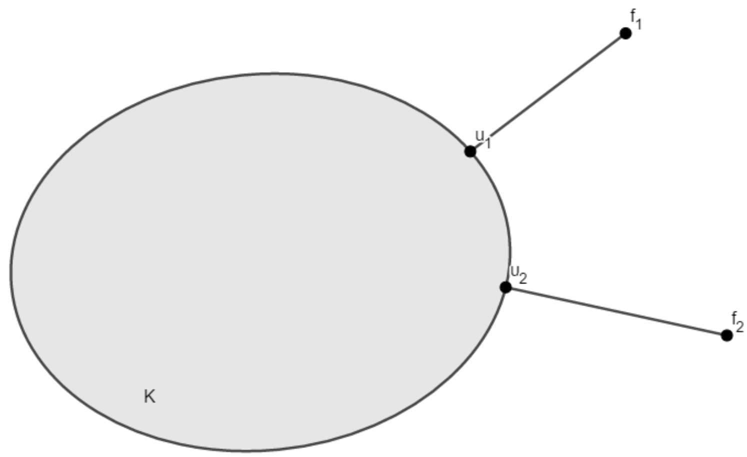
et si l'angle $(\widehat{f-u, v-u})$ est obtu (≥ 0), on a donc $\cos(\widehat{f-u, v-u}) \leq 0$. Le dessin ci-dessous permet de s'en convaincre.



- Il y a un autre théorème qui porte seulement sur l'hypothèse K fermé. Il faut déjà comprendre qu'en perdant la convexité, on perd l'unicité.
+ DESSIN !

- Il y a une autre proposition très visuelle sur les projections et qu'il faut connaître quand on propose ce développement :
En notant, $P_k f_1$ la projection de f_1 sur K et de même pour f_2, on a :

$$\forall f_1, f_2 \in K, \quad ||P_k f_1 - P_k f_2|| \leq ||f_1 - f_2||.$$



- Mises en garde sur le développement :
  Attention à ...