

# Théorème de Fejér

Mohamed NASSIRI

## Référence :

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, niveau M1, Mohammed El Amrani , p.184 → 192

## Recasage :

- 202 : Exemples de parties denses et applications.
- 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.

## Résumé :

Le théorème de Fejér nous donne un critère de convergence générale des séries de Fourier via les moyennes de Cesàro.

## Prérequis :

Séries de Fourier - Convolution - Noyaux de Dirichlet et de Fejér

### Théorème de Féjer :

En notant  $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)$ , on a

1) Si  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ , alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} = 0$$

2) Si  $f \in L_{2\pi}^p$ ,  $p \in [0, +\infty[$ , alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$$

*Démonstration.*

1) Soit  $\delta \in ]0, \pi]$ . On considère

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)| ; |u - v| \leq \delta\}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)dt \right| \\
&= \left| f(x) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)dt}_{=1} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) \underbrace{K_N(t)}_{\geq 0} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt \quad (\dagger)
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on a  $|x - (x-t)| = |t| \leq \delta$ , ainsi  $|f(x) - f(x-t)| \leq \omega(\delta)$ .

Dans la seconde intégrale, on va majorer (grossièrement)  $|f(x) - f(x-t)|$  par  $2\|f\|_{\infty}$ . En revanche, pour  $K_N(t)$ , il faudra ruser un peu en se rappelant que  $K_N$  est un prolongement par continuité à  $\mathbb{R}$  de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{N} \left( \frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)} \right)^2$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
(\delta \leq |t| \leq \pi) &\Rightarrow (\sin(t/2) \geq \sin(\delta/2)) \Rightarrow \left( K_N(t) \leq \frac{1}{N \sin^2(\delta/2)} \right) \\
&\Rightarrow \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t)dt \leq \frac{1}{2\pi N \sin^2(\delta/2)} \underbrace{\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} dt}_{\leq \int_{0 \leq |t| \leq \pi} dt = 2\pi} \right) \\
&\Rightarrow \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t)dt \leq \frac{1}{N \sin^2(\delta/2)} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à  $(\dagger)$ , on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt \\
&\leq \omega(\delta) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} K_N(t)dt}_{\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \pi} K_N(t)dt = 1} + 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t)dt \\
&\leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_{\infty}}{N \sin^2(\delta/2)}
\end{aligned}$$

En passant au supremum sur les  $x \in \mathbb{R}$ , on a donc

$$\|f - \sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_{\infty}}{N \sin^2(\delta/2)}$$

Puis en faisant  $N \rightarrow +\infty$ , on a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - \sigma_N(f)\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Par ailleurs, comme  $f$  est continue sur le compact  $[0, 2\pi]$ , par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue, et ainsi, en faisant  $\delta \rightarrow 0$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - \sigma_N(f)\|_\infty = 0$$

2) En raisonnant comme précédemment, on a

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_N(f)\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_N(f)(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt \right|^p dx \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction convexe  $u \rightarrow u^p$  et à la mesure  $\mu(t) = \frac{K_N(t)}{2\pi} dt$  (qui vérifie donc bien que  $\mu([-\pi, \pi]) = \int_{[-\pi, \pi]} d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_N(t)}{2\pi} dt = 1$ ), et ensuite le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_N(f)\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt \right|^p dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) d\mu(t) \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p d\mu(t) \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p K_N(t) dt \right) dx \\ &\stackrel{F.T.}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p dx \right)}_{:=g(-t)} dt \end{aligned}$$

où l'on a posé  $g(t) = \|f - \tau_{-t}f\|_p^p$

**Rappel :** Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $a \in \mathbb{R}$ . La *translatée de  $f$  par  $a$*  est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x - a)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_N(f)\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t) dt \\ &= (g * K_N)(0) = \sigma_N(g)(0) \end{aligned}$$

Comme  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ , par le point 1), on a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N(g)(0) = g(0)$  et comme  $g(0) = 0$ , on en déduit donc que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - \sigma_N(f)\|_p = 0$$

□

**Remarques :**

• **Noyaux de Dirichlet et de Fejér :**

En notant  $e_n(x) = e^{inx}$ , la fonction

$$D_N = \sum_{n=-N}^N e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

est appelé *le noyau de Dirichlet d'ordre N*.

La fonction

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

est appelé *le noyau de Fejér d'ordre N*.

Alors 1)(i)  $D_N$  est une fonction paire,  $2\pi$ -périodique, et vérifie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

(ii)  $D_N$  est un prologement par continuité à  $\mathbb{R}$  de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$$

(iii) Pour tout  $f \in L^1_{2\pi}$ , on a

$$S_N(f) = f * D_N$$

2)(i)  $K_N$  est un prologement par continuité à  $\mathbb{R}$  de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{N} \left( \frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)} \right)^2$$

(ii) Pour tout  $f \in L^1_{2\pi}$ , on a

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f) = f * K_N$$

(iii)  $(K_N)_{N \geq 1}$  est une approximation de l'unité de  $L^1_{2\pi}$ .

*Démonstration :*

□

• **Deux inégalités :**

1) Si  $f \in C_{2\pi}$ , alors

$$\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$$

2) Si  $f \in L^p_{2\pi}$ ,  $p \in [0, +\infty[$ , alors

$$\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$$

Démonstration :

□

- **Module de continuité :**
- **Etude rapide de  $x \rightarrow \sin(x^2/2)$  :**
- **Inégalité de Jensen :**

**Inégalité de Jensen :**

Soient  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré tel que  $\mu(X) = 1$  et  $f : X \rightarrow ]a, b[$  une fonction de  $L^1(X)$ . Alors, si  $\varphi$  est une fonction convexe sur  $]a, b[$ , on a

$$\varphi \left( \int_X f d\mu \right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu$$

Démonstration :

Comme  $f$  est convexe, les pentes sont croissantes (*i.e.*) pour tous  $a < s < t < u < b$ , on a

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

Posons  $t = \int_X f d\mu$ . Alors  $a < t < b$ . Par ailleurs, considérons

$$\alpha = \sup_{s \in ]a, t[} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$$

Par suite, on a donc

$$\alpha \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

Ainsi, pour tout  $u \in ]a, b[$ , on a

$$\varphi(u) \geq \varphi(t) + \alpha(u - t)$$

En posant  $u = f(x)$ , on a donc

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \alpha(f(x) - t) \geq 0$$

Comme  $\varphi$  est continue, la fonction  $\varphi \circ f$  est mesurable. En intégrant cette dernière inégalité (et en utilisant le fait que  $\mu(X) = 1$  et que  $t = \int_X f d\mu$ ), on a

$$\int_X \varphi(f(x)) d\mu - \mu(X)\varphi(t) - \alpha \left( \int_X f(x) d\mu - \mu(X)t \right) \geq 0$$

$$\varphi \left( \int_X f d\mu \right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu$$

□

- **Opérateur de translation :**

Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $a \in \mathbb{R}$ . On rappelle que le translatée de  $f$  par  $a$  est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\tau_a f)(x) = f(x - a)$$

- 1) Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , alors  $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$ .  
 2) Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , alors  $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$

*Démonstration :*

1) On a

$$\{x \in \mathbb{R} ; \tau_a f(x) \neq \tau_a g(x)\} = \{x \in \mathbb{R} ; f(x - a) \neq g(x - a)\} = a + \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq g(x)\}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue  $\lambda$  par translation entraîne que

$$\lambda(\{\tau_a f \neq \tau_a g\}) = \lambda(\{f \neq g\})$$

On peut donc définir  $\tau_a$  sur  $L^p(\mathbb{R})$  car la classe de  $\tau_a f$  modulo l'égalité presque partout ne dépend que de celle de  $f$ . Enfin, si  $1 \leq p < +\infty$ ,

$$\|\tau_a f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x - a)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p$$

Pour  $p = +\infty$ , on remarque que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \{\tau_a f > u\} = a + \{f > u\}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue  $\lambda$  par translation entraîne que

$$\|f\|_{\infty} := \supess|f| = \inf\{M > 0 ; \lambda(|f| > M) = 0\} = \supess|\tau_a f| = \|\tau_a f\|_{\infty}$$

2) Supposons que  $f \in C_c(\mathbb{R})$  (l'espace des fonctions continues à support compact). Alors, par le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue et ainsi, on a

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(a \leq \eta) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, |f(x - a) - f(x)| \leq \epsilon)$$

Par suite, pour  $a \leq \eta$ , on a

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x - a) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{(a + \{f \neq 0\}) \cup \{f \neq 0\}} |f(x - a) - f(x)|^p dx \\ &\leq (\lambda(a + \{f \neq 0\}) + \lambda(\{f \neq 0\})) \epsilon^p \\ &\leq 2\lambda(\overline{\{f \neq 0\}}) \epsilon^p \end{aligned}$$

Or,  $\lambda(\overline{\{f \neq 0\}})$  est fini puisque  $f$  est à support compact. Par conséquent,

$$a \leq \eta \Rightarrow \|\tau_a f - f\|_p \leq \left(2\lambda(\overline{\{f \neq 0\}})\right)^{1/p} \epsilon$$

Supposons maintenant  $f \in L^p(\mathbb{R})$ . Comme  $C_c(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R})$ , il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C_c(\mathbb{R})$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad (\dagger)$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p &\leq \|\tau_a f - \tau_a f_n\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \\ &\leq 2\|f_n - f\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ . D'après ( $\dagger$ ), il existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|f_{n_\epsilon} - f\|_p \leq \epsilon/4$$

et par ce qui précède (puisque  $f_n \in C_c(\mathbb{R})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ), il existe  $\eta_\epsilon > 0$  tel que

$$\|\tau_a f_{n_\epsilon} - f_{n_\epsilon}\|_p \leq \epsilon/2 \text{ pour tout } |a| \leq \eta_\epsilon$$

Par conséquent,

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq \epsilon \text{ pour tout } |a| \leq \eta_\epsilon$$

D'où le résultat. □

**Remarque :** Grâce à l'égalité

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_b(\tau_{a-b} f - f)\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p$$

on déduit que si  $1 \leq p < +\infty$  et  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto \tau_a f \end{aligned}$$

est uniformément continue.

**Attention !** Pour  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on n'a pas  $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_\infty = 0$ . En effet, en considérant une fonction caractéristique  $f = \chi_{[\alpha, \beta]}$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a

$$\|\tau_a f - f\|_\infty = 1 \not\rightarrow_{a \rightarrow 0} 0$$

