Base hilbertienne des polynômes orthogonaux

Mohamed NASSIRI

Références :

Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré - p.110, p.140

Recasage :

●●●●● 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
●●●●● 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
●●●●● 234 : Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.
●●●●● 250 : Transformation de Fourier. Applications.
●●●●○ 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
●●●●○ 202 : Exemples de parties denses et applications.
●●●●○ 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
●●●●○ 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
●●●●○ 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
●●●○○ 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Résumé :

Il s'agit d'un très bon développement utilisant plusieurs outils d'analyse (transformée de Fourier, théorème d'holomorphie sous le signe intégral, fonctions holomorphes, ...).

Prérequis :

Transformée de Fourier - Théorème d'holomorphie sous le signe intégral - Séries entières - Analycité - Fonctions holomorphes

---

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $||.||_\rho$.

Démonstration.

Rappel : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Avant de commencer, l'existence d'une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. (c'est cette famille que l'on appelle "la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ") résulte tout simplement du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec le produit scalaire, dans l'espace de Hilbert $L^2(I,\rho)$, défini par :

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Il reste donc à montrer que cette famille est totale. Pour cela, on montre que $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$.
Ch'tite remarque : $vect\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\} = vect\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ car on n'a construit la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de la famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Etape 1 : Introduction d'une transformée de Fourier
Il est légitime de se demander pourquoi introduire la transformée de Fourier. Tout simplement car d'une part, il s'agit d'un problème intégral et d'autre part la seule hypothèse que l'on a (à savoir $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$) fait apparaître une exponentielle (comme notre bonne vieille transformée de Fourier). Ce n'est donc pas si farfelu ...

On considère, avec $f \in L^2(I,\rho)$, la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

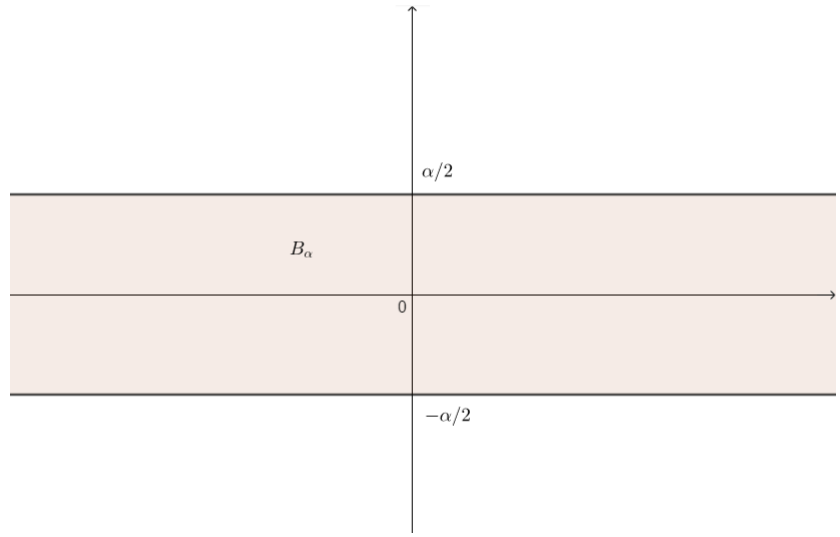
Montrons que $\varphi \in L^1(I,\rho)$ et comme ça, on pourra parler de transformée de Fourier.
$\forall t \geq 0$, on a $t \leq \frac{1}{2}(1+t^2)$ (partir de $(1-t^2) \geq 0$, et bidouiller ...), d'où

$$|f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I, on a donc $\varphi \in L^1(I,\rho)$. On peut ainsi donc considérer la transformée de Fourier de φ :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Etape 2 : On va gratter du terrain ...
On va montrer que $\hat{\varphi}$ se prolonge holomorphiquement sur la bande $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) \leq \alpha/2\}$ en utilisant le théorème d'holomorphie sous signe intégral.



Posons $g(z,x) = e^{-izx} f(x)\rho(x)$. Pour $z \in B_\alpha$, on a :

$$\int_I |g(z,x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_I e^{\alpha|x|/2} |f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{car } |e^{-izx}| = |e^{-i(Re(z)+iIm(z))x}| = \underbrace{|e^{-i(Re(z)x}|}_{=1} \underbrace{|e^{Im(z)x}|}_{Im(z)\leq \alpha/2})$$

et par Cauchy − Schwarz appliqué au produit scalaire $\langle . \rangle_\rho$, on a :

$$\leq \left(\underbrace{\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x}_{<+\infty \text{ par hypothèse}} \right)^{1/2} \left(\underbrace{\int_I |f(x)|^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x}_{f\in L^2(I,\rho)} \right)^{1/2} < +\infty \qquad (\clubsuit)$$

On peut donc définir

$$F(z) = \int_I e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour } z \in B_\alpha$$

. Vérifions que F satisfait les hypothèses du théorème d'holomorphie sous signe intégral :
• $\forall z \in B_\alpha$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
• Pour presque tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe.
• $\forall z \in B_\alpha$,

$$|g(z,x)| \leq h(x) := e^{\alpha|x|/2}|f(x)|\rho(x) \in L^1(I) \quad \text{par } (\clubsuit)$$

Donc F est holomorphe et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\varphi}$. Grâce à ce même théorème, on a :

$$\forall z \in B_\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Etape 3 : Il est peut-être temps de finir !
Par la formule précédente, on a :

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-i)^n \langle f, g_n \rangle_\rho \qquad \text{avec } g_n(x) = x^n$$

Soit $f \in \{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}^\perp$ alors $F^{(n)}(0) = (-i)^n \langle f, g_n \rangle_\rho = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0.

Le théorème du prolongement analytique implique quant à lui que $F = 0$ sur le connexe B_α tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. Ainsi $\hat{\varphi} = 0$.
Comme $\varphi \in L^1(I)$, l'injectivité de la transformée de Fourier implique $\varphi = 0$.
Or

$$\begin{aligned}
&\varphi = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \varphi(x) = 0, \text{ pour presque tout } x \in I \\
\Leftrightarrow\ & f(x)\rho(x) = 0, \text{ pour presque tout } x \in I \\
\underbrace{\Rightarrow}_{\rho(x)>0}\ & f(x) = 0, \text{ pour presque tout } x \in I
\end{aligned}$$

On a donc bien montré qu'en prenant f dans $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}^\perp$, on a $f = 0$ *i.e.* $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$. $\square$

Remarques :

- Il est judicieux de connaître quelques polynômes orthogonaux. Il sont déterminées par l'intervalle I et par le poids ρ. On a toujours $P_0 = 1$ car les polynômes doivent être unitaires.
  Exemples de polynômes orthogonaux :
  $I =]0, +\infty[$, $\rho(x) = e^{-x}$, polynômes de Laguerre.
  $I =]-1, 1[$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, polynômes de Tchebychev.
  $I =]-\infty, +\infty[$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, polynômes de Hermite.
  $I =]-1, 1[$, $\rho(x) = 1$, polynômes de Legendre. 5 premiers polynômes de Legendre :

  $$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2},\ P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2},\ P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$

  C'est vite pénible ...
  Il y a également une relation de récurrence que l'on peut également "s'amuser" à retrouver :

  $$P_n(x) = (x - \lambda_n)P_{n-1}(x) + \mu_n P_{n-2}(x)$$

  où

  $$\lambda_n = \frac{\langle P_{n-1}(x), xP_{n-1}(x)\rangle_\rho}{||P_{n-1}(x)||_\rho^2} \quad \text{et} \quad \mu_n = -\frac{||P_{n-1}(x)||_\rho^2}{||P_{n-2}(x)||_\rho^2}$$