Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

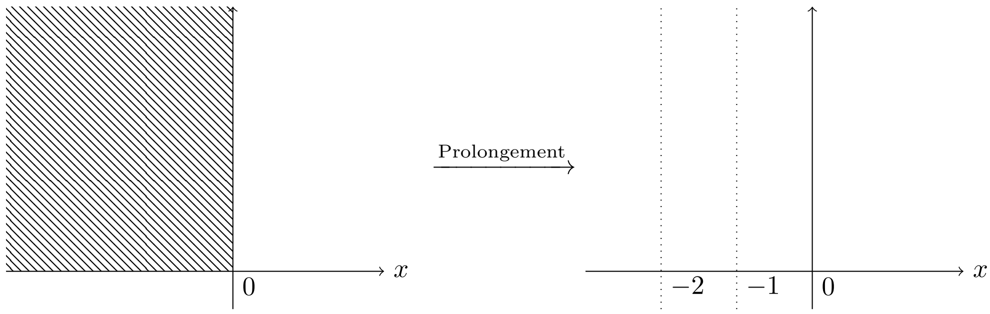
Mohamed NASSIRI

Nous connaissons plusieurs fonctions dites "usuelles". La plus célèbre et "originelle" est la fonction exponentielle. A partir de cette fonction remarquable, il est possible de "directement" définir encore d'autres toutes aussi remarquables : sin, cos, sh, ch, etc.

Mais plusieurs fonctions n'ont pas cette "chance" et sont définies à partir d'une intégrale. Elle sont de la forme $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$. La plus célèbre est la fonction Γ d'Euler définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

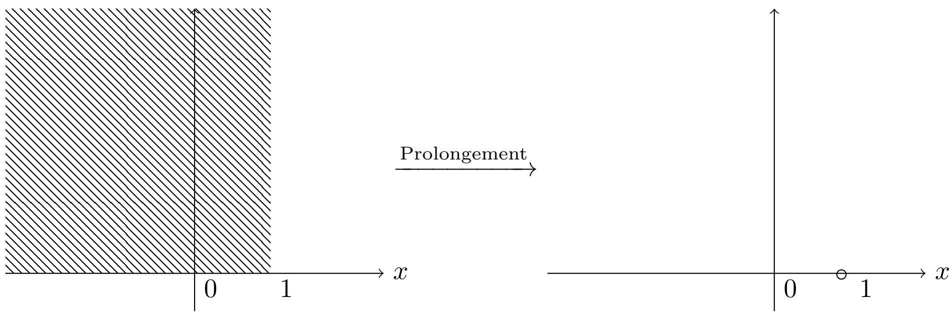
On verra que cette fonction peut-être vu comme une extension de la définition de la factorielle. On tombera aussi sur des célèbres résultats : formule de Weierstrass, formule des compléments, etc. Mais surtout, on verra que l'on peut prolonger holomorphiquement Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$.



D'autres fonctions sont définies à partir d'une série dont la plus célèbre est la fonction ζ de Riemann définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{pour} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$$

Grâce aux séries de Fourier, on connait déjà deux valeurs de ζ : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Mais on va également encore sous-tirés quelques informations ... Cette fonction permet de montrer que la série $\sum 1/p_n$ diverge (où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant). Comme pour la foncion Γ, on peut gratter du terrain sur de domaine de définition en prolongeant ζ holomorphiquement sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.



D'autres fonctions méritent également d'être mentionnées car elles ont déstabilisé plus d'un mathématicien et qu'elle ont joué un rôle essentiel dans l'histoire des mathématiques : on va les appeler *fonctions pathologiques*. Parmi celles-ci, on peut citer : la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, la fonction de Takagi (ou blanc-manger), les

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon ♠

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco

[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer

[WAR] Mathématiques Tout-en-Un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel

[HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Bertrand Hauchecorne

[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Formule des compléments

Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$

1 Autour de l'exponentielle

1.1 La fonction exponentielle complexe [ML3an] p.404 → 406

Définition 1 *La fonction exponentielle complexe est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 2 *(i) La fonction exponentielle complexe est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, .)$.*
(ii) La fonction exp *est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et égale à sa fonction dérivée.*
(iii) La fonction exp *est surjective sur $\mathbb{C}^*$.*

Proposition 3 *(i) La restriction $\exp_{|\mathbb{R}}$ est une bijection dérivable strictement croissante et convexe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
(ii) De plus, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

Proposition 4 *La fonction*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \exp(ix) \end{aligned}$$

est périodique, à valeurs dans le cercle unité, et elle est surjective. Sa période est notée 2π.
La fonction exponentielle est donc $2i\pi$-périodique.

Proposition 5 *Application réciproque de l'exponentielle réelle*
(i) L'application réciproque de $\exp_{|\mathbb{R}}$ est appelée logarithme népérien et notée ln.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

1.2 Fonctions trigonométriques [DTZ] p.352-353

Définition 6 *On définit les applications cosinus et sinus, notées respectivement cos et sin, par :*

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} \end{aligned}$$

Proposition 7 *(i) Les fonctions* cosinus *et* sinus *sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

(ii) Les fonctions cosinus *et* sinus *sont 2π-périodiques.*
(iii) La fonction cosinus *est paire et la fonction* sinus *est impaire.*
(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Proposition 8 *Les fonctions* cosinus *et* sinus *sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remarque 9 *Le théorème du prolongement analytique permet de montrer que toutes les formules sur $\mathbb{R}$ sont encore valables sur $\mathbb{C}$.*

1.3 Fonctions hyperboliques [WAR] p.160-161

Définition 10 *On définit les applications* cosinus hyperbolique *et* sinus hyperbolique, *notées respectivement* ch *(ou* cosh*) et* sh *(ou* sinh*), par :*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sh} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \end{aligned}$$

Proposition 11 *(i) Les fonctions* ch *et* sh *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = -\mathrm{sh}(x), \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

(ii) La fonction ch *est paire et la fonction* sh *est impaire.*
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Application 12 *Soit* $\mathcal{H}$ *l'hyperbole d'équation* $x^2 - y^2 = 1$. *Alors l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t) \end{aligned}$$

est un paramétrage de la partie droite de $\mathcal{H}$.

Proposition 13 *Les fonctions* ch *et* sh *sont développables en série entière sur* $\mathbb{R}$, *avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[GOUan] p.239

Remarque 14 *Le théorème du prolongement analytique permet de montrer que toutes les formules sur* $\mathbb{R}$ *sont encore valables sur* $\mathbb{C}$.

2 Fonction Γ d'Euler

2.1 Définition et propriétés [ML3an] p.514

Définition 15 *La* fonction Γ d'Euler *est définie sur le demi-plan* $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ *par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Remarque 16 *On a deux valeurs remarquables de* Γ *:* $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

Proposition 17 *La fonction* Γ *ainsi définie est holomorphe.*

Proposition 18 *(i)* $\forall z \in \mathcal{H}$, *on a* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $\Gamma(n+1) = n!$.

2.2 Propriétés sur ℝ [GOUan] p.295-296, p.160→162

Proposition 19 Γ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 20 Γ *est logarithmiquement convexe (donc en particulier convexe) sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 21 *(i)* $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$
(ii) Formule de Stirling
$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$

Illustration 22 *Voir* Figure 1.

2.3 Quelques jolis relations [GOUan] p.295 → 298

Proposition 23

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}$$

Proposition 24 Formule de Weierstrass

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right]$$

où γ *est la constante d'Euler.*

Proposition 25 ♠ Formule des compléments ♠
$\forall z \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

2.4 Prolongement de Γ

Théorème 26 ♠ Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \backslash \{-\mathbb{N}\}$ ♠
La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

est un prolongement méromorphe de Γ *sur* $\mathbb{C}$, *holomorphe sur* $\mathbb{C} \backslash \{-\mathbb{N}\}$, *dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs.* **[OBJ] p.82-83**

3 Fonction ζ de Riemann

3.1 Définition et propriétés [ML3an] p.514

Définition 27 *La fonction ζ est définie sur le demi-plan $\mathcal{G} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ par*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

Remarque 28 *On connait deux valeurs de ζ : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.*

Proposition 29 *La fonction ζ ainsi définie est holomorphe.*

3.2 Propriétés sur $\mathbb{R}$ [GOUan] p.282-283

Proposition 30 *ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.*

Proposition 31 *(i) $\lim\limits_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$*
(ii) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Proposition 32 *Pour $s > 1$, on a*

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t$$

[ML3an] p.514

Proposition 33 (admis ?) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2.(2k)!} b_{2k}$$

[GOUan] p.299 $\to$ 301

Théorème 34 (admis) *Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Alors,*

$$\forall s > 1, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$$

Corollaire 35 *La série $\sum 1/p_n$ diverge.*

3.3 Prolongement de ζ

Théorème 36 (admis) *Prolongement de ζ sur $\mathbb{C} \backslash \{1\}$ La fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.*

4 Fonctions pathologiques

Définition 37 *"Une fonction f est dite pathologique si elle a déstabilisé plus d'un mathématicien et qu'elle a joué un rôle essentiel dans l'histoire des mathématiques." Christian Aebi.*

Proposition 38 *La fonction de Dirichlet*

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{Q}} \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

est une fonction qui :
(i) n'est continue en aucun point.
(ii) est bornée, intégrable au sens de Lebesgue, mais pas au sens de Riemann. **[HAU] p.134,208**

Proposition 39 *En notant Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à $[-1/2, 1/2]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Alors la fonction de Takagi (ou blanc-manger)*

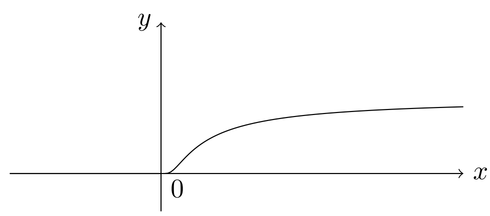
$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p} \end{aligned}$$

est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.
Voir Figure 13 *et* Figure 14. **[GOUan] p.85**

Proposition 40 *La fonction*

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor.



[GOUan] p.241

Proposition 41 *La fonction de Weierstrass*

$$\begin{aligned} f \ : \ & [0,1] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & si\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{N}, \\ & q \in \mathbb{N}^*,\ (p,q) = 1 \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel. **[GOUan] p.110**

Illustrations

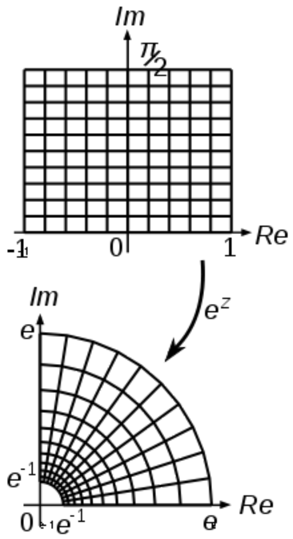


Figure 1 : La fonction exponetielle complexe

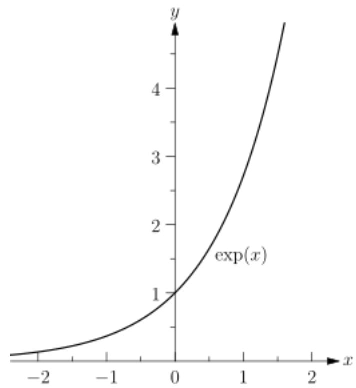


Figure 2 : La fonction exponetielle réelle

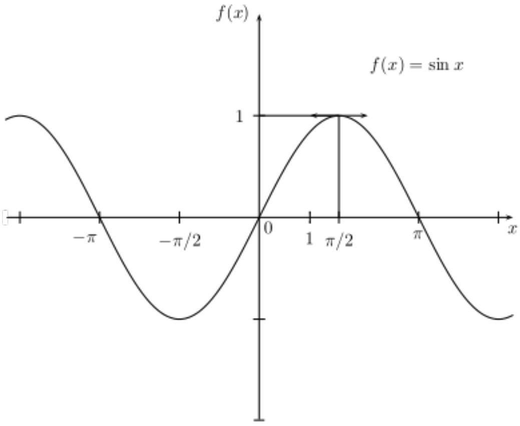


Figure 3 : La fonction sinus

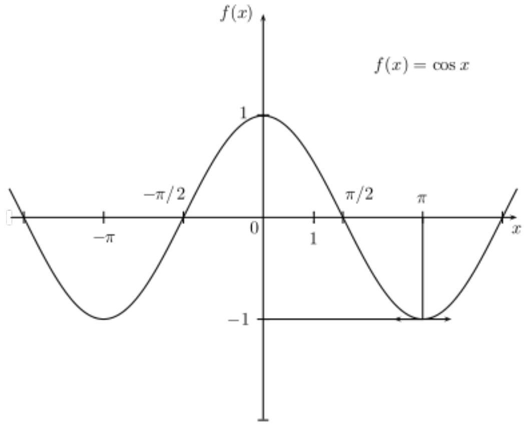


Figure 4 : La fonction cosinus

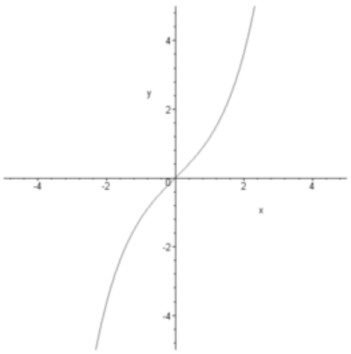


Figure 5 : La fonction sinus hyperbolique

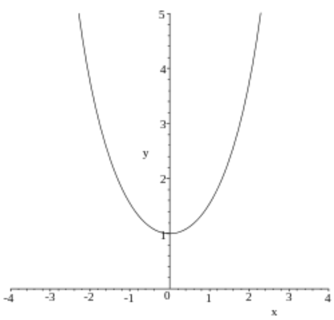


Figure 6 : La fonction cosinus hyperbolique

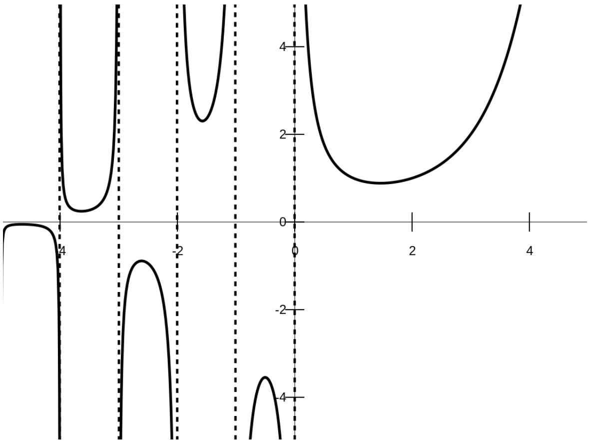


Figure 7 : Allure de la fonction Gamma

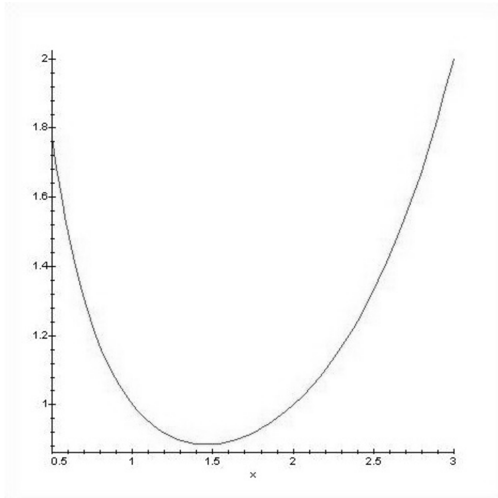


Figure 8 : La fonction Gamma en positif

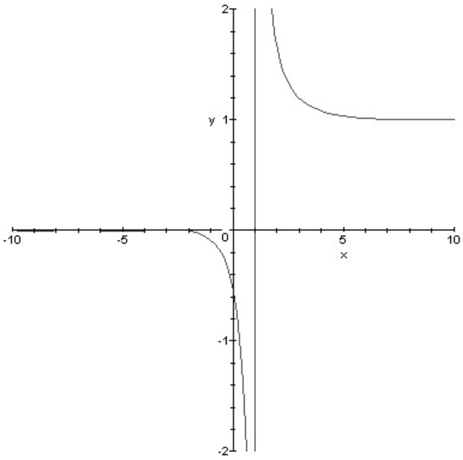


Figure 9 : Allure de la fonction Zeta

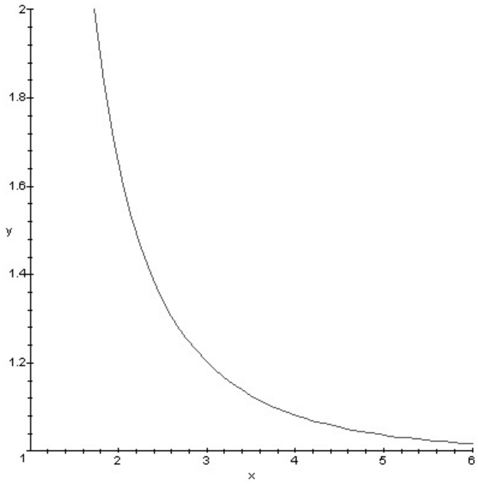


Figure 10 : La fonction Zeta en positif

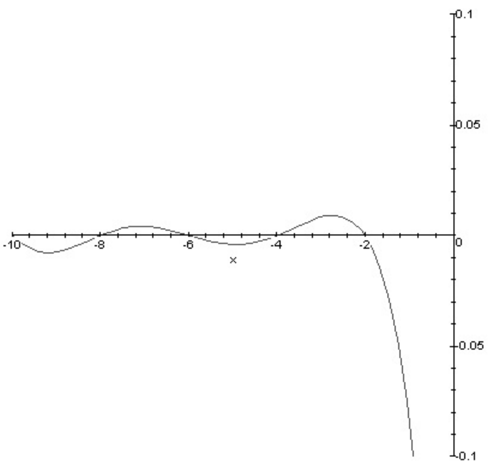


Figure 11 : La fonction Zeta en négatif

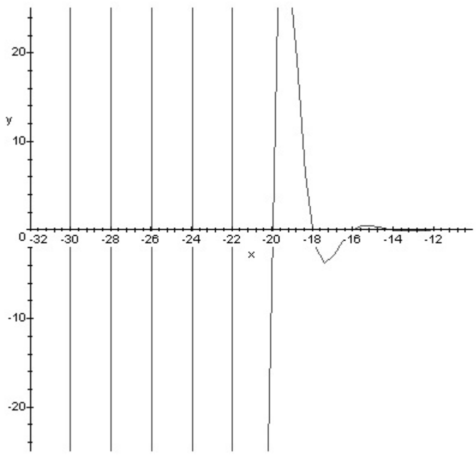


Figure 12 : La fonction Zeta en (fortement) négatif

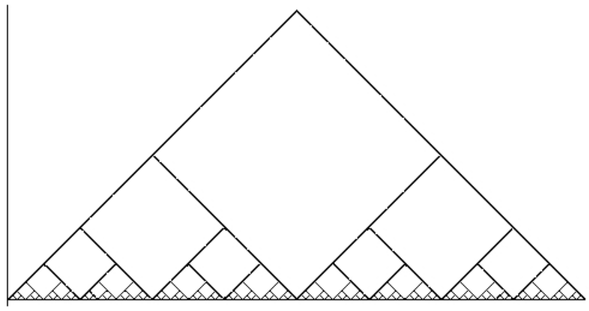


Figure 13 : Les fonctions à sommer pour obtenir la fonction de Takagi

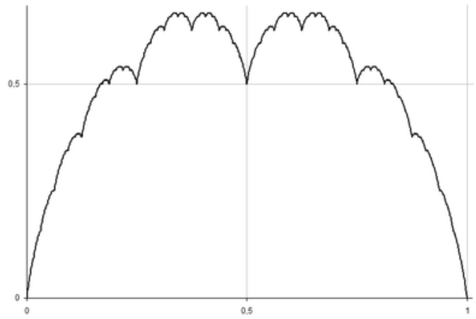


Figure 14 : La fonction de Takagi

Questions

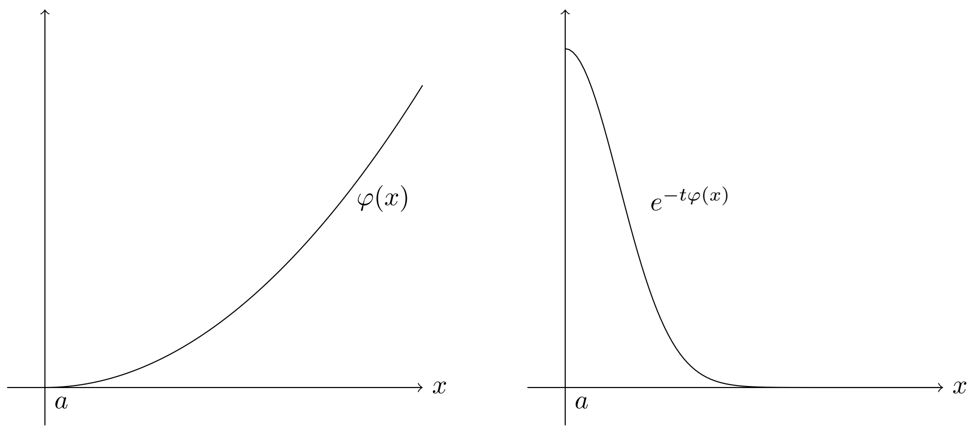
Exercice : Formule de Stirling Montrer que $\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t}$.

Solution : Il faudra ici utiliser la fameuse méthode de Laplace dont on rappelle l'énoncé

Méthode de Laplace : Soit $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$, de classe C^2 et $f[a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi}f$ soit Lebesgue intégrable pour un certain t_0. On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$ et on pose $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x$
Si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ alors

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$$

En remarquant que, pour t assez grand, la fonction $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$ décroit rapidement, la méthode de Laplace dit que *grosso modo* la contribution essentielle à l'intégrale provient d'un voisinage du point a qui est l'abscisse du maximum de la fonction $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$



Revenons donc à notre exercice ...
Comme $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x$, on remarque que la fonction $x \mapsto x^t e^{-x}$ atteint son maximun en $x = t$, donc on peut s'attendre à ce que la contribution essentielle à l'intégrale provienne d'un voisinage de ce point.
On a, en appliquant un changement de variable qui nous ramène à un maximum atteint en 0 :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x \underset{x=t(u+1)}{=} \int_{-1}^{+\infty} (t(u+1))^t e^{-t(u+1)} t\mathrm{d}u = t^{t+1}\int_{-1}^{+\infty} e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u$$

avec $\varphi(u) = 1 + u + \ln(u+1)$.
On peut appliquer la méthode de Laplace en remarquant que

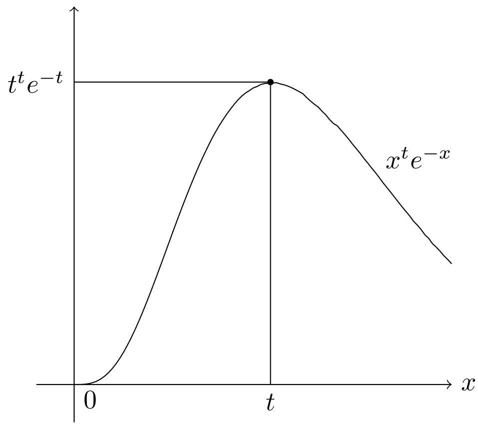
$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi''(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0 \\ f = 1 \\ t_0 > 0 \end{cases}$$

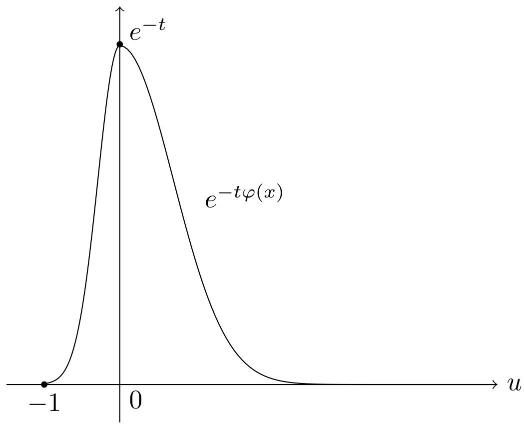
On a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^{-t} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{0} e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^{-t}$$

Par conséquent,

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t}$$





Exercice : Montrer que, pour $s > 1$, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t$$

Solution : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$, on a

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}e^{-t}}{n^s}\mathrm{d}t \underset{t=nu}{=} \int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-nu}\mathrm{d}u$$

Par suite, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-nu}\mathrm{d}u$$

On aimerait intervertir la somme et l'intégrale grâce au théorème de Fubini mais pour cela, il faut s'assurer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u^{s-1}e^{-nu}| \right) \mathrm{d}u < +\infty$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |u^{s-1}e^{-nu}|\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} u^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu} \right) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} u^{s-1} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u < +\infty
\end{aligned}$$

car pour $0 \leq u \leq 1$, la fonction $u \mapsto \frac{u^{s-1}}{e^u-1}$ est continue et donc intégrable sur $]0,1]$ et pour $u \in [1, +\infty[$, $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2 \frac{u^{s-1}}{e^u-1}$, donc $\frac{u^{s-1}}{e^u-1} = O(u^{-2})$.
Par conséquent, pour $s > 1$, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u$$