Formule des compléments

Mohamed NASSIRI

Référence :

Analyse complexe et applications, Martine Queffféllec et Hervé Queffélec, p183-184, p.234-235

Recasage :

• • • • • 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
• • • • • 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.
• • • • • 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
• • • • • 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Résumé :

A grands coups de théorème de Fubini, de changements de variable et de théorème des résidus, on démontre cette relation importante vérifiée par la fonction Γ d'Euler.

Prérequis :

Fonction Γ d'Euler - Fonctions holomorphes et méromorphes - Théorème des résidus - Intégration et changement de variables

---

Théorème : Soit $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Pour $p, q \in \mathcal{H}$, $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$. Alors, on a

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

En particulier, pour $p \notin \mathbb{Z}$, on a la formule des compléments :

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

Démonstration.
Etape 1 : $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ *:*

Soient $p, q \in \mathcal{H}$,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{q-1}e^{-s}\mathrm{d}s\right) \underset{\substack{t=x^2\\ s=y^2}}{=} \left(2\int_0^{+\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(2\int_0^{+\infty} y^{2q-1}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$$

Par le théorème de Fubini suivi d'un passage en coordoonées polaires, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{+\infty} r^{2p+2q-2}2re^{-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{p-1}(\sin^2\theta)^{q-1}2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, en considérant le changement de variable $t = r^2$, on a :

$$\int_0^{+\infty} r^{2p+2q-2}2re^{-r^2}\mathrm{d}r = \int_0^{+\infty} t^{p+q-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(p+q)$$

Dans la seconde intégrale, en considérant le changement de variable $s = \cos^2\theta$, $0 \leq s \leq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{p-1}(\sin^2\theta)^{q-1}2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1}\mathrm{d}s = B(p,q)$$

Etape 2 : Petite pause ... :

En prenant dans la formule précédente p et $q = 1-p$, on a

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \underbrace{\Gamma(1)}_{=1}B(p,1-p) = B(p,1-p)$$

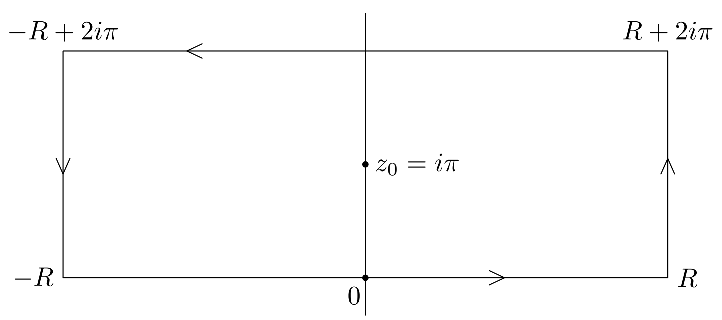
Etape 3 : Quelques changements de variables :

Supposons d'abord que $0 < p < 1$, on a, en considérant le changement de variable $\frac{t}{1-t} = u$, $\frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \frac{\mathrm{d}u}{1+u}$, suivi du changement de variable $u = e^x$

$$\begin{aligned}
B(p,1-p) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}\frac{\mathrm{d}t}{1-t} \\
&= \int_0^{+\infty} u^{p-1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{px}}{1+e^x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Etape 4 : Place au théorème des résidus :

Considérons la fonction f définie par $f(z) = \frac{e^{pz}}{1+e^z}$ qui possède un pôle simple en les points $i\pi + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On isole le pôle $i\pi$ dans un contour rectangulaire γ_R qu'on choisit de façon à profiter de la $2i\pi$-périodicité de e^z.



Par le théorème des résidus, on a

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{pz}}{1+e^z}\mathrm{d}z = 2i\pi\mathrm{Res}(f, i\pi) = 2i\pi(-e^{ip\pi})$$

En décortiquant l'intégrale, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} f(R+it)\mathrm{d}t - \int_{-R}^{R} f(x+2i\pi)\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} f(-R+it)\mathrm{d}t \qquad (\dagger)$$

Or,

$$\left|\int_0^{2\pi} f(-R+it)\mathrm{d}t\right| \leq 2\pi \frac{e^{pR}}{e^R - 1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

et

$$\left|\int_0^{2\pi} f(R+it)\mathrm{d}t\right| \leq 2\pi \frac{e^{(1-p)R}}{e^R - 1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

Puis par passage à la limite dans (†), on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}(1-e^{2ip\pi})}{e^x+1}\mathrm{d}x = -2i\pi e^{ip\pi}$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{e^x+1}\mathrm{d}x = -\frac{2i\pi e^{ip\pi}}{1-e^{2ip\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

Conclusion : Pour $0 < p < 1$, puis par pronlogement analytique, pour $p \notin \mathbb{Z}$, on a la formule des compléments :

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

□

Shut up Anderson ! You lower the IQ of the entire street !

Sherlock Holmes, Sherlock (2010)

Remarques :

- On peut démontrer la formule des compléments par le théorème suivant :

Rappel - Formule de Weierstrass : En notant $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, on a

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right]$$

où γ est la constante d'Euler.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{1}{\Gamma(-z)} &= -z^2 e^{\gamma z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\right] \\ &= -z^2\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = -z\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\end{aligned}$$

Puis, comme $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, on obtient le résultat.

$\square$

Hop hop hop ! Pas si vite ! On a quand même admis le résultat (pas évident) suivant :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Démonstration :

$\square$

- Pour la fonction f définie par $f(z)=\frac{e^{pz}}{1+e^z}$, on a affirmé que $\text{Res}(f,i\pi)=-e^{ip\pi}$. On a utilisé le théorème suivant

> **Théorème :** Soit $f=g/h$, où g,h sont des fonctions holomorphes au voisinage de $a\in\Omega$. On suppose que a est un zéro simple de h et que $g(a)\neq 0$. Alors, a est un pôle simple de f de résidu
>
> $$\text{Res}(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}$$

Démonstration : Il nous suffit de calculer $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$ pour avoir le résidu de f en a. Or, comme $h(a)=0$, on a

$$(z-a)f(z)=(z-a)\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}}$$

Or, comme h est holomorphe en a, on a

$$\frac{h(z)-h(a)}{z-a}\xrightarrow{z\to a}h'(a)$$

avec $h'(a)\neq 0$ puisque a est un zéro simple de h. Par suite,

$$(z-a)f(z)=\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}}\xrightarrow{z\to a}\frac{g(a)}{h'(a)}$$

$\square$