Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Mohamed NASSIRI

Partant d'une définition élémentaire, les matrices symétriques réelles et les matrices hermitiennes permettent de mieux visualiser les problèmes en lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes : réductions, classifications, etc. Par conséquent, le théorème spectral et le théorème de Sylvester ont deux points de vue : un point de vue matriciel et un point de vue "forme quadratique".

Un autre résultat remarquable en lien avec ces matrices (plus particulièrement les matrices symétriques réelles et hermitiennes définies positives) : la décomposition polaire. Cette décomposition permet de décomposer toute matrice en un produit de matrices plus "robustes" et dont on connait bien les propriétés.

Les applications sont variées. En analyse numérique, on pourra souligner l'importance des matrices symétriques réelles et hermitiennes définies positives. Elle joue un rôle important notamment dans la convergence des méthodes itératives. En calcul différentiel, la matrice hessienne, qui est symétrique grâce au théorème de Schwarz, joue un rôle essentiel dans la nature des points critiques. Et, avec le concept de signature, on a un très joli résultat : le lemme de Morse.

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[GOUag] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠
[DUM] Modélisation à l'oral de l'agrégation : calcul scientifique, Laurent Dumas
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠

Développements

Lemme de Morse

Décomposition polaire OU Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si ${}^tA = A$. Elle est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$.* **[GRI] p.31**

Proposition 2 *$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n$), l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{A}_n$), l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.* **[GRI] p.31**

Proposition 3 *1) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$*
2) On pose E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1. Alors $((E_{ii})_{1\leq i\leq n}, (E_{ij}+E_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$ est une base de $\mathcal{S}_n$
$((E_{ij}-E_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$ est une base de $\mathcal{A}_n$
Par conséquent, $\dim\mathcal{S}_n = n(n+1)/2$ et $\dim\mathcal{A}_n = n(n-1)/2$. **[GOUag] p.228 − 229**

Définition 4 *On dit qu'une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est hermitienne si ${}^t\bar{A} = A$.* **[GOUag] p.229**

Exemple 5 *La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ est hermitienne.*

Proposition 6 *Toute matrice hermitienne $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $H = S + iA$, où $S \in \mathcal{S}_n$, et $A \in \mathcal{A}_n$.*
$\mathcal{H}_n$, l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ forme un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n^2. **[GOUag] p.229**

1.2 Lien avec les formes bilinéaires symétriques et hermitiennes [GOUag] p.227 → 229

Proposition 7 *Soit B une base de E. Une forme bilinéaire φ sur E est symétrique (resp. antisymétrique) si, et seulement si sa matrice dans la base B est symétrique (resp. antisymétrique).*

Proposition 8 *Soit B une base de E. Une forme sesquilinéaire φ sur E est hermitienne si, et seulement si sa matrice dans la base B est hermitienne.*

Définition 9 *Soient q une forme quadratique sur E et B une base de E.*
On appelle matrice de q dans la base B la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B, et la rang de q le rang de cette matrice.

Exemple 10 *On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on y définit la forme quadratique q par*

$$u = (x, y, z) \mapsto q(u) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$$

Alors la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 11 *Soient Φ une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-e.v E et B une base de E.*
On appelle matrice de Φ dans la base B la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B, et la rang de Φ le rang de cette matrice.

Exemple 12 *On se place dans $\mathbb{C}^2$ et on y définit la forme hermitienne Φ par*

$$\Phi : u = (x, y) \mapsto \overline{x}x - 2\overline{y}y + \frac{3}{2}\overline{y}x + \frac{3}{2}y\overline{x}$$

Alors la forme polaire de Φ est :

$$\varphi(u_1, u_2) = \overline{x_1}x_2 - 2\overline{y_1}y_2 + \frac{3}{2}\overline{y_1}x_2 + \frac{3}{2}y_2\overline{x_1}$$

et la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

2 Réduction

2.1 Théorèmes spectraux [GRI] p.221 $\rightarrow$ 287

Définition 13 *Un endormorphisme f d'un espace euclidien (ou hermitien) est dit autoadjoint si*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \quad \forall x, y \in E$$

En d'autres termes, f est autoadjoint si $f^* = f$.

Proposition 14 *f est autoadjoint si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthormée est symétrique.*

Théorème 15 • *Version endomorphisme :*
Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Alors f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
• *Version matricielle :*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A' =^t PAP$ soit diagonale.

Remarque 16 *Les matrices symétriques complexes (non réelles) ne sont pas nécessairement diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$). Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.*

Proposition 17 *f est autoadjoint si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthormée est hermitienne.*

Théorème 18 • *Version endomorphisme :*
Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace hermitien. Alors les valeurs propres de f sont toutes réelles, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
• *Version matricielle :*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Il existe $U \in U_n$ telle que $A' =^t \overline{U}AU$ soit diagonale réelle.

2.2 Classification des formes quadratiques et hermitiennes

Théorème 19 *Soit q une forme quadratique sur E, un $\mathbb{C}$-e.v. Alors, il existe une base (e_i) telle que, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,*

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$$

où $r = \mathrm{rg} q$

Théorème 20 *Théorème de Sylvester Si E est un $\mathbb{R}$-e.v. (resp. $\mathbb{C}$-e.v.), et q une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E, alors il existe une base (e_i) telle que, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,*

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$$

(resp. $q(x) = |x_1|^2 + ... + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - ... - |x_r|^2$) c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}(q)_{e_i} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $r = \mathrm{rg} q$, et p est entier (qui ne dépend que de q). Le couple $(p, r-p)$, noté $\mathrm{sgn}(q)$, est dit signature de q.

Méthode 21 *Méthode de Gauss* pour permettre de déterminer la signature d'une forme quadratique ou hermitienne.

Exemple 22 • *La forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$$

a pour signature $\mathrm{sgn}(q) = (2, 1)$.
• *La forme quadratique $\Phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\Phi(x) = |x_1|^2 + 5|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + 2i\overline{x_1}x_2 - 2ix_1\overline{x_2} + i\overline{x_2}x_3 - ix_2\overline{x_3}$$

a pour signature $\mathrm{sgn}(\Phi) = (3, 0)$.

2.3 Conséquences sur les matrices et formes définies positives

Définition 23 • *Une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est définie positive si pour tout* $X \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.
• $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M$ *et* $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXMX > 0\}$
• $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M$ *et* $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXMX \geq 0\}$
• $\mathcal{H}_n^{++} = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M} = M$ *et* $X \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\},\ {}^tXMX > 0\}$
• $\mathcal{H}_n^{+} = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M} = M$ *et* $X \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\},\ {}^tXMX \geq 0\}$ [**H2G2t1**] **p.202**

Proposition 24 *Soient une forme bilinéaire* φ *(resp. une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne* ϕ*) sur* E *un* $\mathbb{R}$*-e.v. (resp.* $\mathbb{C}$*-e.v.),* (e_i) *une base de* E *et* $M = \mathrm{Mat}(\varphi)_{e_i}$ *(resp.* $M = \mathrm{Mat}(\phi)_{e_i}$*). Alors* φ *(resp.* ϕ*) définit un produit scalaire ((i.e.)* M *est définie positive) si et seulement si la matrice* M *a toutes ses valeurs propres strictement positives.* [**GRI**] **p.254 – 287**

Proposition 25 *Si* E *est un* $\mathbb{R}$*-e.v. (resp.* $\mathbb{C}$*-e.v.), et* q *une forme quadratique (resp. hermitienne) sur* E*. Alors* q *est définie positive* $\Leftrightarrow \mathrm{sgn}(q) = (n, 0)$ [**GRI**] **p.310 – 331**

Proposition 26 *Orthogonalisation simultanée*
Soient M, N *deux matrices symétriques (resp. hermitiennes), telles que* M *soit définie positive. Alors il existe une matrice* C *inversible telle que*

$${}^t\overline{C}MC = I \quad \text{et} \quad {}^t\overline{C}NC = D$$

où D *est une matrice diagonale réelle.* [**GOUag**] **p.245**

Théorème 27 *Critère de Sylvester :*
Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique.* $\forall k \in \{1, ..., n\}$*, on définit la matrice extraite* $M_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in M_k(\mathbb{R})$*. Alors*
M *est définie positive si et seulement si* $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $\det M_k > 0$*.* [**GOUag**] **p.248**

Application 28 *La matrice* $A = (\frac{1}{1+|i-j|})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est symétrique définie positive.* [**GOUag**] **p.248**

Application 29 • $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un cône ouvert dans* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
• $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$
• $\mathcal{H}_n^{++}$ *est un cône ouvert dans* $\mathcal{H}_n$
• $\overline{\mathcal{H}_n^{++}} = \mathcal{H}_n^{+}$

3 Applications

3.1 Exponentielle de matrices [H2G2t1] p.202 → 210

Théorème 30 ♠ *Décomposition polaire* ♠
On a les homéomorphismes suivants :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (O, S) \mapsto OS$$

$$\mathrm{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ (U, H) \mapsto UH$$

Théorème 31 ♠ *Homéomorphisme entre* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ♠
• *L'application* $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*
• *L'application* $\exp : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n^{++}$ *est un homéomorphisme.*

Corollaire 32 *On en déduit les isomorphismes suivants :*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \approx \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \approx \mathrm{U}_n \times \mathbb{R}^{n^2}$$

3.2 Méthodes itératives des systèmes linéaires [DUM] p.167 → 169

Théorème 33 *Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire Ax=b*
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*. On considère la décomposition régulière de* $A = M - N$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, et la suite* $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad Mu_{k+1} = Nu_k + b \qquad k \in \mathbb{N}$$

Alors la méthode converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ *(où* ρ *désigne le rayon spectral).*

Théorème 34 *Soit* $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*. Pour une méthode itérative associée à la décompostion* (M, N) *de* A*, on a* ${}^tM + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$*.*
Si de plus, ${}^tM + N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*, alors la méthode converge.*

3.3 Calcul différentielle : matrice hessienne [ML3an] p.700 → 702

Théorème 35 *Théorème de Schwarz*
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ *ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, une application deux fois différentiable en* $a \in \mathcal{U}$*. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Définition 36 *Avec les mêmes notation, la matrice hessienne de* f *en* a *est donnée par :*

$$Hf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque 37 *Hf_a est symétrique d'après le théorème de Schwarz.*

Théorème 38 • *Condition du premier ordre :*
Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application différentiable en x_0. Si x_0 est un extremum local de f sur $\mathcal{U}$, alors

$$Df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})},$$

autrement dit, x_0 est un point critique de f.
• *Condition du second ordre :*
Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en x_0. Alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local de f sur $\mathcal{U}$ si et seulement si la hessienne $Hf(x_0)$ est définie positive (resp. définie négative).

Remarque 39 *La réciproque du premier point est fausse et du point également si on enlève le caractère "définie" de la hessienne ! Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f'(0) = f''(0) = 0$ donc 0 est un point critique et la hessienne en 0 est positive (car elle est nulle). Or 0 n'est pas un extremum local de f.*

Application 40 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \quad (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.*
Points critiques : $(0,0), (0,\sqrt{2})$ *et* $(0,-\sqrt{2})$

Nature des points critiques :

$$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Hf_{(0,\sqrt{2})} = Hf_{(0,-\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ n'est pas un extremum. C'est en fait un point selle car ($h(0,1) = -3/4 < 0$ et $h(1,0) = 1 > 0$).
Comme $Hf_{(0,\sqrt{2})}$ et $Hf_{(0,-\sqrt{2})}$ sont définies positives, $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$ sont des minimums locaux de f.
De plus, comme $f(x,y) - f(0,\sqrt{2}) = f(x,y) - f(0,-\sqrt{2}) = x^2 + (\frac{y^4}{4} - 1)^2 \geq 0$. Ces minimums sont même globaux.

Théorème 41 ♠ *Lemme de Morse* ♠
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u := \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$ ∎

[**ROU**] **p.354**, **p.210**

Questions

Exercice : Soit $n > 1$ et $M = (m_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{ij} \in \{-1, 1\}$ et $M^tM = nI_n$. Montrer que n est un multiple de 4.

Solution : Montrons que n est pair :
On a donc $(M^tM)_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik}m_{jk} = n\delta_{ij}$. Ainsi pour $i \neq j$, $\sum_{k=1}^n m_{ik}m_{jk} = 0$ et comme les $m_{ij} \in \{-1, 1\}$, il y a autant de 1 et -1 dans la somme (pour qu'elle soit nulle), et donc n est pair.

Notons que la relation pour $i \neq j$, $\sum_{k=1}^n m_{ik}m_{jk} = 0$ signifie que les lignes de la matrice M sont orthogonales.

Montrons que n est un multiple de 4 :
En multipliant par -1 une colonne de M, on ne change pas le fait que pour $i \neq j$, $\sum_{k=1}^n m_{ik}m_{jk} = 0$. Il est donc possible de mettre M sous la forme :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{1 \quad 1 \quad \dots}^{p \text{ termes}} & \overbrace{\dots \quad 1 \quad 1}^{p \text{ termes}} \\ -1 \quad -1 \quad \dots & \dots \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad -1 \quad \dots & \dots \quad -1 \quad 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right) = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où $n = 2p$. Ainsi de chaque côté de la "séparation" il y a le même nombre 1 et de -1.
Regardons la ligne 3. Soit q le nombre de 1 du "côté gauche" et r le nombre de 1 du "côté droit". Il y a donc $p - q$ fois le nombre -1 du "côté gauche" et $p - r$ fois le nombre -1 du "côté droit". Par suite,

$$0 = \langle L_1, L_3 \rangle = q + r + (q - p) + (r - p) \Leftrightarrow q + r = p \tag{1}$$
$$0 = \langle L_2, L_3 \rangle = -q + r + (p - q) + (r - p) \Leftrightarrow r = q \tag{2}$$

De (1) et (2), on en déduit que $p = 2q$ et donc $n = 2p = 4q$.

Exercice : 1) Soient $t_1, ...t_n \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $M = (m_{ij}) = (t_it_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est positive.
2) Même question avec les réels $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ et M définit par $M = (m_{ij}) = (\inf(t_i, t_j)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution : 1) Soit $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$$\begin{aligned} {}^txMx = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij}x_ix_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_it_jx_ix_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^n t_jx_j\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n t_kx_k\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc M est bien positive.

2) Détaillons un peu la matrice M :

$$M = (\inf(t_i, t_j)) = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_1 & \dots & t_1 \end{pmatrix}}_{=M_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 & \dots & t_2 - t_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & t_2 - t_1 & \dots & t_2 - t_1 \end{pmatrix}}_{=M_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}}_{=M_n}$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, et posant $t_0 = 0$, on a

$${}^t x M x = {}^t x (M_1 + M_2 + ... + M_n) x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\geq 0} \left(\sum_{k=i}^{n} x_k \right)^2 \geq 0$$

Donc M est bien positive.
