

Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Interpolation Lagrange + Newton Cotes

Approximation uniforme weierstrass

Approx local : Formules de Taylor

Dvpt en SE

Polynômes trigonométriques

Références

[HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon

[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer

[FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Théorème de Weierstrass

Théorème de Féjer

1 Interpolation polynomiale

1.1 Interpolation de Lagrange

Théorème 1 Soient a_1, \dots, a_n n éléments distincts de \mathbb{R} , et soient b_1, \dots, b_n n éléments de \mathbb{R} . Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que

$$P(a_i) = b_i, \quad i = 1 \dots n$$

Ce polynôme s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif à la donnée a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n . De plus, il a pour expression

$$P(X) = \sum_{i=1}^n b_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1.2 Erreur et convergence

Théorème 2 Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} , x_0, \dots, x_n $n + 1$ points distincts de $[a, b]$, et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme interpolateur de f aux points x_0, \dots, x_n . On pose $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \Pi_n(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

Remarque 3 Attention, on n'a pas nécessairement une "bonne convergence" du polynôme interpolateur de Lagrange vers la fonction que l'on souhaite interpoler. Un cas très académique illustrant cette mauvaise convergence est le phénomène de Runge.

Voir Figure 1.

Corollaire 4 En reprenant les mêmes notations que le théorème précédent, on a donc

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{\|\Pi_n(x)\|_\infty}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}(\zeta)\|_\infty$$

1.3 Application à l'intégration numérique : Méthode de Newton-Cotes [HUB2] p.1 → 8

Principe 5 On se donne une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ d'un intervalle $[a, b]$. On a donc

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \int_{-1}^1 f(\alpha_k) dt$$

avec $\alpha_k = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} + t \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$.

Une méthode de Newton-Cotes consiste à se donner une formule de quadrature dite élémentaire de

la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \sim \sum_{i=0}^p \omega_i g(s_i)$$

où s_i désignent les $p+1$ points équirépartis sur l'intervalle $[-1, 1]$:

$$s_i = -1 + \frac{i}{2p}$$

et d'approcher alors $\int_a^b f(x)dx$ par

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k})$$

avec $x_{i,k} = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} + s_i \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$

Proposition 6 La formule de quadrature élémentaire d'ordre p est obtenue en remplaçant la fonction g par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points s_i . En notant L_i , le $i^{\text{ème}}$ polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points s_i :

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}$$

les formules de quadrature élémentaires sont par conséquent données par

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \sim \sum_{i=0}^p g(s_i) \int_{-1}^1 L_i(t)dt \sim \sum_{i=0}^p \omega_i g(s_i)$$

où $\omega_i = \int_{-1}^1 L_i(t)dt$.

Exemple 7 voir Tableau 1

Théorème 8 Convergence des méthodes de Newton-Cotes

Soit f une fonction Riemann intégrable sur un intervalle de discrétisation $[a, b]$. On se donne une famille de discrétisation de $[a, b]$

$$a = x_0^h < x_1^h < \dots < x_N^h = b$$

de pas $h = \max_{k=0, \dots, N} |x_{k+1}^h - x_k^h|$.

Soit $T_p^h(f)$ la formule de quadrature d'ordre p associée :

$$T_p^h(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1}^h - x_k^h) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k}^h)$$

Alors $T_p^h(f)$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$ lorsque le pas h de la discrétisation tend vers zéro.

Théorème 9 Erreur de quadrature

On note $T_{[a,b]}^{p,N}(f)$ la formule de quadrature d'ordre

p , associée à la discrétisation de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$:

$$T_{[a,b]}^{p,N}(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k})$$

Si f est une fonction de classe C^{p+1} , et si on note h le pas de la discrétisation $h = \max_{k=0, \dots, N} |x_{k+1}^h - x_k^h|$, alors

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_{[a,b]}^{p,N}(f) \right| \leq C_p (b-a) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_\infty$$

où C_p ne dépend que de p .

2 Approximation uniforme [ML3an] p.141 → 144

Théorème 10 Théorèmes de Dini

1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de \mathbb{R} . Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I , alors la convergence est uniforme.

2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de \mathbb{R} . Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I , alors la convergence est uniforme.

Proposition 11 La suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} P_0 & = 0 \\ P_{n+1}(u) & = P_n(u) + \frac{1}{2}(u - P_n^2(u)) \quad \forall u \in [0, 1] \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$.

Théorème 12 Théorème de Stone-Weierstrass (forme réelle)

Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique compact. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) Pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

(ii) Les fonctions constantes appartiennent à \mathcal{A} . Alors, \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 13 Théorème de Stone-Weierstrass (forme complexe)

Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique compact. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) Pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

(ii) Les fonctions constantes appartiennent à \mathcal{A} .
 (iii) Pour toute fonction f de \mathcal{A} , la fonction conjuguée \bar{f} est dans \mathcal{A} .
 Alors, \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 14 ♠ Théorème de Weierstrass ♠
 Soit I un segment de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Alors f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme. [GOUan] p.284 → 286

Remarque 15 Le précédent théorème utilise dans sa démonstration la convolution qui est définie plus loin.
 On peut également retrouver le théorème de Fejér que l'on verra par la suite.

3 Approximation locale : Formules de Taylor [GOUan] p.73 → 75

Théorème 16 Formule de Taylor-Lagrange
 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$$

Remarque 17 Lorsque 0 appartient à l'intervalle de définition I , on a, sous les mêmes hypothèses,

$$\forall x \in I, \exists \theta_x \in]0, 1[, \\ f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_x x)$$

Théorème 18 Formule de Taylor-Young Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^n sur I , telle que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors, lorsque $h \rightarrow 0$, on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

Théorème 19 Formule de Taylor avec reste intégral
 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$. Alors,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

4 Développement en série entière

4.1 Définitions et premières propriétés [GOUan] p.236-239

Définition 20 On appelle série entière de variable complexe, toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

où z est une variable complexe et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans \mathbb{C} .

Proposition 21 Lemme d'Abel
 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors
 (i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente ;
 (ii) $\forall r > 0, 0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Définition 22 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.
 Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.

Si $R = +\infty$, la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ définit une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} appelée fonction entière.

Proposition 23 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors
 (i) Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,
 (ii) Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.
 (iii) $\forall r > 0, 0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Théorème 24 L'application $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Proposition 25 Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n$$

est convergente. Alors la série entière de variable t , $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ et la somme est continue sur ce segment. [DTZ] p.321-322

Théorème 26 *L'application*

$$f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

est de classe C^1 . La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} na_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, et on a

$$\forall x \in]-R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

Corollaire 27 *La somme f de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R, R[$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En outre,*

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

Corollaire 28 *Soit f la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R . Alors la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et si F désigne la somme de cette dernière, on a $F' = f$ sur $]-R, R[$.*

4.2 Fonctions développables en série entière [GOUan] p.240-241

Définition 29 *Une fonction (de la variable réelle ou complexe) à valeurs complexes définie dans un voisinage de 0 est dite développable en série entière sur un voisinage de 0 si sur ce voisinage, f coïncide avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.*

Proposition 30 *Développement en série entière des fractions rationnelles*

Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(z - z_0)^p} = -\frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!} \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p+1)!} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$$

Proposition 31 *Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

tende simplement vers 0 sur $]-\alpha, \alpha[$. La série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

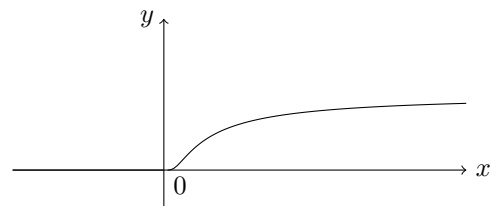
a alors un rayon de convergence supérieur ou égal à α et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

Exemple 32 *La fonction*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor (pour tout n , on a $f^{(n)}(0) = 0$).



Proposition 33 *Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant un voisinage de 0, une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ et R_n l'application définie comme précédemment. Alors*

$$\forall x \in I, |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x) |x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

où pour tout n et pour tout $x \in I$, $M_{n+1}(x)$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[0, x]$ si x est positif et $[x, 0]$ si x est négatif. [DTZ] p.327

Proposition 34 *Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, et s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-R, R[$ où $R = \min(\alpha, \rho)$. [ELAM] p.250

4.3 Développement en série entière de fonctions usuelles [DTZ] p.327 → 331

Proposition 35 *Développements en série entière classiques :*

• $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En particulier, $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

• Pour $\alpha = 1$ et en primitivant, $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

En particulier, $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

4.4 Fonctions classiques définies comme sommes de séries entières [GOUan] p.243

Proposition-Définition 36 La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On définit l'exponentielle complexe par

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \exp(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$$

Définition 37 On définit les applications cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique définies sur \mathbb{C} , notées respectivement ch (ou cosh) et sh (ou sinh), par :

$$\operatorname{ch} z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Définition 38 On définit les applications cosinus et sinus définies sur \mathbb{C} , notées respectivement cos et sin, par :

$$\operatorname{cos} z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sin} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

5 Polynômes trigonométriques

5.1 Polynômes trigonométriques et séries trigonométriques [ELAM2] p.170 → 173

Définition-Proposition-Rappels 39 (i) On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} . Muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$$

$(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(ii) On note $L_{2\pi}^p$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} et qui appartiennent à L_{loc}^p . Muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

et si $p = +\infty$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|f(x)| ; x \in [0, 2\pi]\}$$

$(L_{2\pi}^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach $\forall p \in [1, +\infty[$.

(iii) $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $(L_{2\pi}^p, \|\cdot\|_p)$ $\forall p \in [1, +\infty[$.

(iv) $L_{2\pi}^2$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

est un espace de Hilbert.

(v) Par l'inégalité de Hölder, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{C}_{2\pi} \subset L_{2\pi}^\infty \subset L_{2\pi}^p \subset L_{2\pi}^1$$

Définition 40 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ donné par

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Proposition 41 La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormal de $L_{2\pi}^2$, appelé système trigonométrique.

Définition 42 On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie d'éléments du système trigonométrique.

Définition 43 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. On dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ converge si chacune des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ converge, et on note la somme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

On appelle série trigonométrique toute somme de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx} \quad (\alpha_n \in \mathbb{C})$$

dont on définit la convergence comme indiqué ci-dessus en prenant pour $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des sommes partielles symétriques d'ordre n :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikx}$$

Application 44 Soient $f \in L_{2\pi}^1$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f)$ donné par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Soit $f \in L_{2\pi}^1$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f .

Toute série de Fourier est une série trigonométrique, mais la réciproque est fautive! Exemple : $\sum_{n \geq 1} \cos(nx)$

Théorème 45 Pour $f \in C_{2\pi}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 < \epsilon$.

Théorème 46 Le système trigonométrique $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Théorème 47 Formule de Parseval

Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors

1) $(S_N(f))$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

5.2 Noyaux de Féjer, de Dirichlet et convergence [ELAM2] p184 → 192

Définition 48 Pour $f, g \in L^1_{2\pi}$, le produit de convolution $f * g$ au point x , quand il existe, est donné par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x)g(x)dt$$

Définition 49 La fonction

$$D_N = \sum_{n=-N}^N e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

où $e_n(x) = e^{inx}$, est appelé le noyau de Dirichlet d'ordre N .

Proposition 50 (i) D_N est une fonction paire, 2π -périodique, et vérifie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$$

(ii) D_N est un prologement par continuité à \mathbb{R} de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$$

(iii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$$S_N(f) = f * D_N$$

Définition 51 La fonction

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

où $e_n(x) = e^{inx}$, est appelé le noyau de Féjer d'ordre N .

Proposition 52 (i) K_N est un prologement par continuité à \mathbb{R} de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)} \right)^2$$

(ii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f) = f * K_N$$

(iii) $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité de $L^1_{2\pi}$.

Théorème 53 ♠ Théorème de Féjer ♠

En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$, on a

1) Si $f \in C_{2\pi}$, alors

$$\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}, \text{ et}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} = 0$$

2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [0, +\infty[$, alors

$$\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p, \text{ et}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$$

Illustrations

Méthodes	Coefficients	$\int_{-1}^1 g(t) dt$	$\int_a^b g(x) dx$
Rectangles à gauche	$p = 0$ $s_0 = -1$ $\omega_0 = 2$	$\sim 2g(-1)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$
Rectangles à droite	$p = 0$ $s_0 = 1$ $\omega_0 = 2$	$\sim 2g(1)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$
Point milieu	$p = 0$ $s_0 = 0$ $\omega_0 = 2$	$\sim 2g(0)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)$
Trapèzes	$p = 1$ $s_0 = -1, s_1 = 1$ $\omega_0 = 1, \omega_1 = 1$	$\sim g(-1) + g(1)$	$\sim \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) (f(x_k) + f(x_{k+1}))$
Simpson	$p = 2$ $s_0 = -1, s_1 = 0, s_2 = 1$ $\omega_0 = \frac{1}{3}, \omega_1 = \frac{4}{3}, \omega_2 = \frac{1}{3}$	$\sim \frac{1}{3} (g(-1) + 4g(0) + g(1))$	$\sim \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right)$

Tableau 1 : Formules élémentaires les plus classiques

Le phénomène de Runge

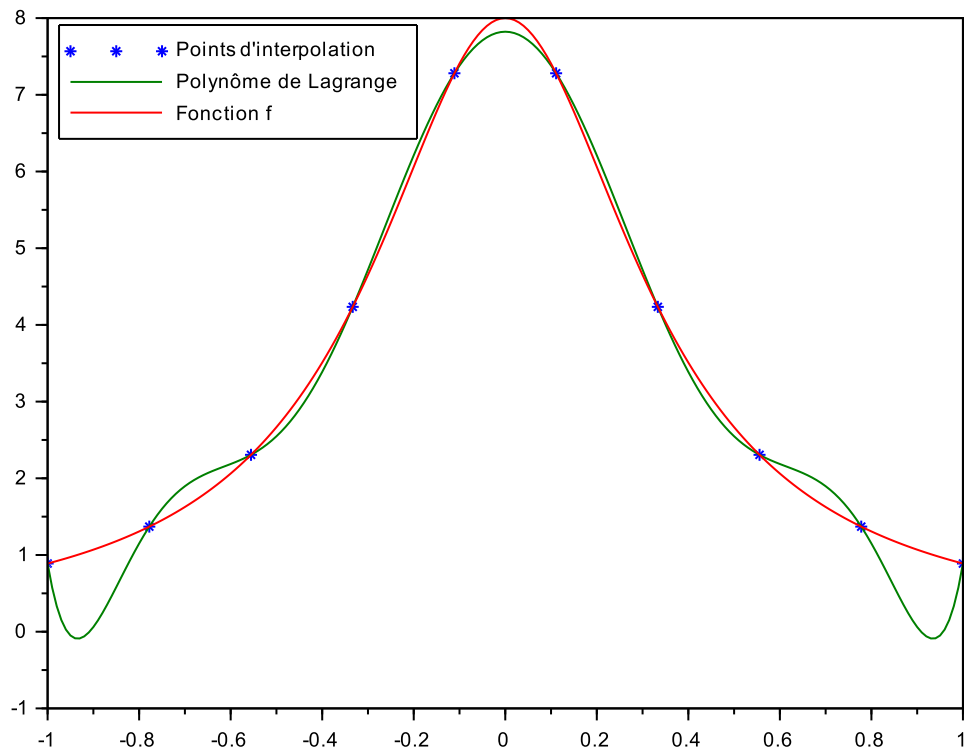


Figure 1 : Phénomène de Runge

Questions

Exercice : Démonstration formules de Taylor + exo 6 p81 gouan

Solution :

Exercice : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} , x_0, \dots, x_n $n + 1$ points distincts de $[a, b]$, et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme interpolateur de f aux points x_0, \dots, x_n . On pose $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \Pi_n(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

Convergence des méthodes de Newton-Cotes

Soit f une fonction Riemann intégrable sur un intervalle de discrétisation $[a, b]$. On se donne une famille de discrétisation de $[a, b]$

$$a = x_0^h < x_1^h < \dots < x_N^h = b$$

de pas $h = \max_{k=0, \dots, N} |x_{k+1}^h - x_k^h|$.

Soit $T_p^h(f)$ la formule de quadrature d'ordre p associée :

$$T_p^h(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1}^h - x_k^h) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k}^h)$$

Alors $T_p^h(f)$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque le pas h de la discrétisation tend vers zéro.

Erreur de quadrature

On note $T_{[a,b]}^{p,N}(f)$ la formule de quadrature d'ordre p , associée à la discrétisation de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$:

$$T_{[a,b]}^{p,N}(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k})$$

Si f est une fonction de classe C^{p+1} , et si on note h le pas de la discrétisation $h = \max_{k=0, \dots, N} |x_{k+1}^h - x_k^h|$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_{[a,b]}^{p,N}(f) \right| \leq C_p (b-a) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_\infty$$

où C_p ne dépend que de p .

Solution :

