Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[DEM] Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly
[CIA] Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Philippe Ciarlet
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[DUM] Modélisation à l'oral de l'Agrégation : Calcul scientifique, Laurent Dumas
[FILB] Analyse numérique : Algorithme et étude mathématique, Francis Filbet
[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠

Développements

Convergence des méthodes itératives
Méthode du gradient à pas optimal
Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les suites récurrentes

1.1 Suites récurrentes réelles [ELAM] p.38-39

Définition 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. (u_n) est dite <u>suite récurrente</u> si elle est définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est une application continue.*

Proposition 2 *Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers $l \in I$, alors nécessairement $f(l) = l$.*

Exemple 3 *Si la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$, sa limite est nécessairement égale à -1 ou 3.*

Proposition 4 *Soit (u_n) une suite réelle définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que $f(I) \subset I$.*
1) Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone.
2) Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés.

Exemple 5 *Etude de la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$.*

1.2 Suites récurrentes vectorielles [GOUan] p.192 → 194

Définition 6 *Soient (E, d) un espace métrique et $h \in \mathbb{N}^*$. Une suite (u_n) à valeurs dans E est dite <u>récurrente d'ordre h</u> si on peut écrire*

$$\forall n \geq h, \quad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-h})$$

où f est une application de E^h dans E (les premières valeurs $u_0, ..., u_{h-1}$ étant données).

Proposition 7 *Soient (E, d) un espace métrique et (u_n) une suite récurrente d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ vérifiant*

$$\forall n \geq h, \quad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-h})$$

où f est une application de E^h dans E.
Si la suite (u_n) converge vers une limite l et si l'application f est continue au point $(l, ..., l)$, alors on a $f(l, ..., l) = l$.

Définition 8 *On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans E vérifie une récurrence linéaire (homogène) d'ordre h à coefficients constants si*

$$\forall n \geq h, \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... a_h u_{n-h} \quad (\sharp)$$

avec $(a_1, ..., a_h) \in \mathbb{C}^h$

Proposition 9 *L'équation*

$$X^h - a_1 X^{h-1} - ... - a_h = 0$$

s'appelle *équation caractéristique* *de la récurrence* ($\sharp$). *Si on note* $r_1, ..., r_q$ *ses racines et* $\alpha_1, ..., \alpha_q$ *ses multiplicités respectives, alors l'ensemble des suites* (u_n) *vérifiant* ($\sharp$) *est l'ensemble des suites de la forme*

$$u_n = P_1(n) r_1^n + ... + P_q(n) r_q^n$$

où pour tout $1 \leq i \leq q$, P_i *est un polynôme vérifiant* $\deg(P_i) < \alpha_i$.

Exemple 10 *Récurrences linéaires à coefficients constants d'ordre 2 :*

$$u_0,\ u_1,\ \ \forall n \leq 2,\ u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2} \qquad (\flat)$$

L'équation caractéristique correspondante est

$$x^2 - ax - b = 0 \qquad (E)$$

- Si (E) *possède deux racines (réelles) distinctes* x_1, x_2*, alors les suites vérifiant* ($\flat$) *sont de la forme*

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

où λ *et* μ *sont déterminés par* u_0 *et* u_1.
- Si (E) *possède une racine double* x*, alors les suites vérifiant* ($\flat$) *sont de la forme*

$$u_n = (n\lambda + \mu) x^n$$

où λ *et* μ *sont déterminés par* u_0 *et* u_1.
- Si (E) *possède deux racines complexes* $\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta}$*, alors les suites vérifiant* ($\flat$) *sont de la forme*

$$u_n = \rho^n (\gamma \cos(n\theta) + \delta \sin(n\theta))$$

où γ *et* δ *sont déterminés par* u_0 *et* u_1.

2 Suites récurrentes et points fixes

2.1 Théorèmes de point fixe

Définition 11 *Soient* (E, d_E), (F, d_F) *deux espaces métriques. On dit qu'une application* $f : E \to F$ *est* *contractante (ou k-contractante)* *s'il existe* $k \in]0,1[, \forall (x,y) \in E^2,\ d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x,y)$. [**ML3an**] **p.97**

Théorème 12 *Théorème du point fixe de Picard*
Soient (E, d) *un espace métrique complet et* $f : E \to E$ *une application contractante. Alors* f *admet un unique point fixe.* [**ML3an**] **p.97**

Exemple 13 *Ce théorème est faux si l'on suppose seulement* $d_F(f(x), f(y)) \leq d_E(x,y)$. *Par exemple, la fonction définie sur* $[0, +\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. *Mais si l'on ajoute de la compacité, il redevient vrai.* [**ML3an**] **p.97**

Application 14 *Le système*

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ y = \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{cases}$$

admet une unique solution. [**ML3an**] **p.692**

Proposition 15 *Soient* (E, d) *un espace métrique complet et* $f : E \to E$ *une application telle qu'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *pour lequel* f^p *soit contractante. Alors* f *admet un unique point fixe.* [**ML3an**] **p.98**

Application 16 ♠ *Théorème de Cauchy-Lipschitz local* ♠
Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *(où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, il existe un intervalle* I *voisinage de* t_0 *dans* $\mathbb{R}$ *et une unique application* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *solution de* $y' = F(t,y)$ *telle que* $\varphi(t_0) = x_0$. [**GOUal**] **p.354**

2.2 Classifications des points fixes

Proposition-Définition 17 *Soient* f *une fonction numérique définie sur un intervalle* I *et* $l \in \mathring{I}$ *un point fixe de* f. *Si* f *est dérivable en* l *avec* $|f'(l)| < 1$*, on dit que* l *est un* *point fixe attractif.*
Il existe alors $\alpha > 0$ *tel que :*
Toute suite (u_n) *de la forme*

$$\begin{cases} u_0 \in]l-\alpha, l+\alpha[\\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est définie et converge vers l. **[DTZ] p.151**

Remarque 18 *Cas particulier* $f'(l) = 0$ *:*
Supposons de plus que f *soit de classe* C^2 *et que* $|f'| \leq M$ *sur* I*, à l'aide d'un développement à l'ordre* 2*, on a*

$$|u_n - l| \leq \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|u_0 - l|\right)^{1/2}$$

En particulier, si on choisit u_0 *tel que* $|u_0 - l| \leq \frac{1}{5M}$*, alors*

$$|u_n - l| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^n}$$

Ainsi, 10 itérations suffisent pour obtenir plus de 1000 décimales !
Le point l *est parfois appelé* *point fixe superattractif.*
[DEM] p.95-96

Proposition-Définition 19 *Soient* f *une fonction numérique définie sur un intervalle* I *et* $l \in \mathring{I}$ *un point fixe de* f. *Si* f *est dérivable en* l *avec* $|f'(l)| > 1$*, on dit que* l *est un* *point fixe répulsif.*

Il existe alors $\alpha > 0$ tel que :
Si une suite (u_n) de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est convergente vers l, alors elle est stationnaire.
Si, de plus, l'application f est injective alors elle est constante. **[DTZ] p.152**

Remarque 20 *Cas douteux $|f'(l)| = 1$:*
- Exemple 1 : $f(x) = \sin(x),\ x \in [0, \pi/2]$. On aura

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

- Exemple 2 : $f(x) = \mathrm{sh}(x),\ x \in [0, +\infty[$. On aura

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

[DEM] p.96

2.3 Vitesse de convergence [ELAM] p.39 → 43

Définition 21 *On dit qu'une suite (u_n) converge géométriquement vers 0 si elle est dominée par une suite géométrique (k^n) avec $0 < k < 1$.*

Théorème 22 *Critère de D'Alembert*
Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ tel que $0 < k < 1$. Alors la suite (u_n) converge géométriquement vers 0.

Exemple 23 *Etude des suites récurrentes : (u_n) définie $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f est de classe C^1 et qui admet un point fixe attractif ((i.e.) $0 < |f'(\alpha)| < 1$). (u_n) converge géométriquement vers α*

Proposition 24 *Critère de Cauchy*
Une suite (u_n) de nombres réels positifs converge géométriquement si et seulement si $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$.

Définition 25 *On dit qu'une suite (u_n) converge lentement vers 0 si elle est minorée par une suite du type (A/n^α) avec A et α des nombres réels strictement positifs.*

Définition 26 *On dit qu'une suite (u_n) tend vers 0 avec une convergence (au moins) quadratique si elle est dominée par une suite (k^{2n}) avec $0 < k < 1$.*

Théorème 27 *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergente vers 0. On suppose que la suite (u_{n+1}/u_n^2) a une limite finie (ou simplement qu'elle est bornée). Alors la convergence de (u_n) est quadratique.*

3 Applications à la recherche de zéros

3.1 Dichotomie [FILB] p.95-96

Méthode 28 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.*
On pose $m = \frac{a+b}{2}$ et on calcule $f(m)$.
Si $f(a)f(m) < 0$, il existe $\overline{x} \in [a, m]$ solution de $f(\overline{x}) = 0$.
Si $f(a)f(m) > 0$, alors $f(b)f(m) < 0$ il existe $\overline{x} \in [m, b]$ solution de $f(\overline{x}) = 0$.
En itérant ce procédé, on obtient l'algorithme de la dichotomie.

3.2 Méthode de Newton [ROU] p.152 → 156

Théorème 29 ♠ *Méthode de Newton* ♠
• Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c, d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.
Alors pour $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a.
• De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a, d]$, la méthode converge et on a :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ si } n \to +\infty$$

[ROU] p.152

4 Applications au méthodes numériques

4.1 Méthodes itératives

Définition 30 *Si $(M, N) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tel que l'on a la décomposition dite décomposition régulière $A = M - N$, on dit que la méthode itérative associée à (M, N) converge si pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite de premier terme u_0 et définie par $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$$

converge. **[DUM] p.167**

Remarque 31 *On utilise parfois la notation sui-*

vante :

$$A = \begin{pmatrix} & \ddots & & & \\ \ddots & & \ddots & -F & \\ & \ddots & D & \ddots & \\ & -E & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix} = D - E - F$$

Exemple 32 *Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation :*
Voir Tableau 1 **[CIA] p.102**

Théorème 33 ♠ *<u>Convergence des méthodes itératives</u>* ♠ *La méthode itérative associée à* (M, N) *converge si et seulement si* $\rho(M^{-1}N) < 1$.**[DUM] p.XXX**

Théorème 34 *Soit A une matrice hermitienne symétrique définie positive, décomposée sous la forme*

$$A = M - N, \quad M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Si la matrice $({}^t\overline{M} + N)$ *est définie positive, alors*

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

[CIA] p.102-103

Théorème 35 *Soit A une matrice hermitienne symétrique définie positive. La méthode de relaxation converge si* $0 < \omega < 2$.
Le rayon spectral de la méthode de relaxation vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|, \quad \omega \neq 0$$

Par conséquent, la méthode de relaxation ne peut converger que si $0 < \omega < 2$. **[CIA] p.103-105**

4.2 Méthode de gradient [DIM] p.208 → 212

Théorème 36 *Soient A une matrice symétrique définie positive,* $b \in \mathbb{R}^n$ *et* $c \in \mathbb{R}$. *Alors les problèmes*

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax = b$$

et

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) \\ &\text{avec } f(y) = \langle Ay, y\rangle - \langle b, y\rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

sont équivalents.

Définition 37 *Pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif*

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \ r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k\rangle} \end{cases}$$

est appelé <u>méthode du gradient à pas optimal</u>.

Théorème 38 ♠ *La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour tout matrice symétrique définie positive.*

Lemme 39 ♠ *<u>Inégalité de Kantorovitch</u>* ♠
Soient A une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. *Alors, pour* $x \in \mathbb{R}^n$, *on a l'inégalité*

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}||x||^4$$

Illustrations

Nom de la méthode	Décomposition $A = M - N$	Matrice $M^{-1}N$ de la méthode itérative	Description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E + F)$	$J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E + F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D - E) - F$	$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$	$(D - E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation ($\omega \neq 0$)	$A = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$

Tableau 1 : Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :