# Transformation de Fourier. Applications.

Mohamed NASSIRI

L'idée est de généraliser la décomposition d'un signal en série de Fourier dans le cas d'un signal quelconque (décomposition selon un spectre continu).

Sans précaution, pour une fonction $f$, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est définie par

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

Il faut néanmoins faire attention aux espaces où est définit cette transformation ($L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, etc.) car les propriétés que l'on peut en tirer seront probablement différentes : continuité, injectivité, surjectivité, etc.

De plus, dans le cadre des séries de Fourier, on sait que l'application

$$\mathcal{S} \ : \ f \in \mathcal{CM}_{2\pi} \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$$

est injective. Heureusement pour nous, la transformée a également cette propriété ! On pourra donc étudier la transformée de Fourier d'une fonction $f$, qui est plus régulière et plus manipulable, sans perdre d'informations sur $f$.

Une des applications (historiquement) importantes est que la transformation de Fourier transforme des problèmes différentiels en problèmes algébriques, beaucoup plus simples à résoudre. Par exemple, l'équation de transport linéaire, l'équation de la chaleur, etc.

**Références**

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amrani
[FAR] Calcul intégral, Jacques Faraut
[ELHAJ] Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions, El-Haj Laamri
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

**Développements**

Résolution de l'équation de la chaleur par transformée de Fourier
Base hilbertienne des polynômes orthogonaux

## 0 Convolution et espaces $L^p(\mathbb{R})$ [FAR] p.113 → 124

**Définition 1** *Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle translatée de $f$ par $a$ la fonction définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

**Proposition 2** *(i) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, alors $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$ et $||\tau_a f||_p = ||f||_p$.*
*(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\lim\limits_{a\to 0} ||\tau_a f - f||_p = 0$*

**Théorème 3** *$L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ :*
*Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.*
*Pour presque tout $x$, l'application $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable.*
*La fonction $f*g$, qui est définie presque partout par*

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

*est intégrable, et*

$$||f*g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$$

**Théorème 4** *$L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ :*
*Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.*
*Pour presque tout $x$, l'application $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable.*
*La fonction $f*g$, qui est définie presque partout par*

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

*appartient à $L^p(\mathbb{R})$, et*

$$||f*g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$$

**Théorème 5** *$L^1(\mathbb{R}) * C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$ :*
*Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.*
*La fonction $f * g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et*

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_1 ||g||_\infty$$

**Théorème 6** *$L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$ :*
*Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.*
*La fonction $f * g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et*

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_2 ||g||_2$$

# 1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [ELAM2] p.109 → 122

**Proposition-Définition 7** *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

*est continue et bornée par $||f||_1$. On l'appelle la transformée de Fourier de f dans $L^1(\mathbb{R})$.*
*L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\to C_0(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

*est linéaire et continue. On l'appelle la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$*

**Exemple 8**

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) \begin{cases} 2\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2} & si\ \xi \neq 0 \\ b - a & si\ \xi = 0 \end{cases}$$

**Remarque 9** *La fonction $\chi_{[a,b]}$ est un exemple de fonction qui prouve que la transformation de Fourier n'opère pas dans $L^1(\mathbb{R})$.*

**Proposition 10** *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$$

**Théorème 11** *Formule d'échange*
*Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) g(u) \mathrm{d}u$$

**Théorème 12** *La transformation de Fourier*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\to C_0(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

*est une application injective*

**Remarque 13** *La transformation de Fourier conjuguée est donnée par*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{ix\xi} \mathrm{d}x$$

**Théorème 14** *Formule d'inversion*
*Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

**Théorème 15** *Si $f, \widehat{f}, g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et de plus, on a*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}$$

**Théorème 16** *(i) Transformation de Fourier d'une dérivée*
*Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$$

*(ii) Dérivée d'une transformation de Fourier*
*Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée $(\widehat{f})'$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ donnée par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\widehat{f})'(\xi) = -i\mathcal{F}(xf)(\xi)$$

# 2 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ [ELAM2] p.122 → 130

**Théorème 17** *Formule de Plancherel-Parseval*
*Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$||\widehat{f}||_2^2 = 2\pi ||f||_2^2$$

**Proposition-Définition 18** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*
*(i) Il existe une suite $(f_n)$ dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.*
*(ii) la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\tilde{f}$ (indépendante de la suite $(\widehat{f_n})$). Cette limite est la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$ (que l'on notera encore $\widehat{f}$).*
*(iii) $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}), ||.||_2)$*
*(iv) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f} = \tilde{f}$.*

**Proposition 19** *(i) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*

$$\lim_{A \to +\infty} ||\varphi_A - \widehat{f}||_2 = 0 \quad et \quad \lim_{A \to +\infty} ||\Psi_A - f||_2 = 0$$

*où*
*$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$, et*

$\Psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$

*(ii) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

**Théorème 20** *Formule d'échange*
*Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $f\widehat{g}$ et $\widehat{f}g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$,*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) g(u) \mathrm{d}u$$

**Théorème 21** *(i) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*

$$f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}.\widehat{g}) \quad \text{et} \quad \widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}$$

*(ii) Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\widehat{f}.\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}.\widehat{g})$$

**Définition 22** *On appelle opérateur de Fourier-Plancherel, l'opérateur*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

**Théorème 23** *(i) L'espace vectoriel $\mathcal{W}(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.*
*(ii) L'opérateur de Fourier-Plancherel*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

*est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, d'inverse $\mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$.*

# 3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [ELAM2] p.135 → 136

**Théorème 24** *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier :*

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

**Définition 25** *On dit que la suite $(f_n)$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, si*

$$\forall \alpha, \beta \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f_n^{(\beta)}(x)| = 0$$

**Théorème 26** *La transformation de Fourier*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

*est une application bijective et bicontinue. On a*

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}$$

**Proposition 27** *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

# 4 Applications

## 4.1 Polynômes orthogonaux

**Définition 28** *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de vecteurs de $H$ est dite*
*1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$*
*2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker)*
*3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans $H$.*
*On appelle base hilbertienne de $H$ une famille orthonormée totale de vecteurs de $H$.* [**ML3al**] **p.331**

**Proposition 29** *1) Toute famille orthormée est libre*
*2) $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$.* [**ML3al**] **p.331**

**Définition 30** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

*On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité $\rho$ par rapport à la mesure de Lebesgue.* [**OBJ**] **p.110**

**Théorème 31** ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho$ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

*alors la famille des polynômes orthogonaux associée à $\rho$ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$.* [**OBJ**] **p.140 → 143**

## 4.2 Equations aux dérivées partielles

### 4.2.1 Equation de transport [DIM] p.35

**Théorème 32** *L'équation de transport (à vitesse constante c) :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R},\ u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

*a pour solution $u(x,t) = u_0(x - ct)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

### 4.2.2 Equation de la chaleur [ELHAJ] p.264 → 266

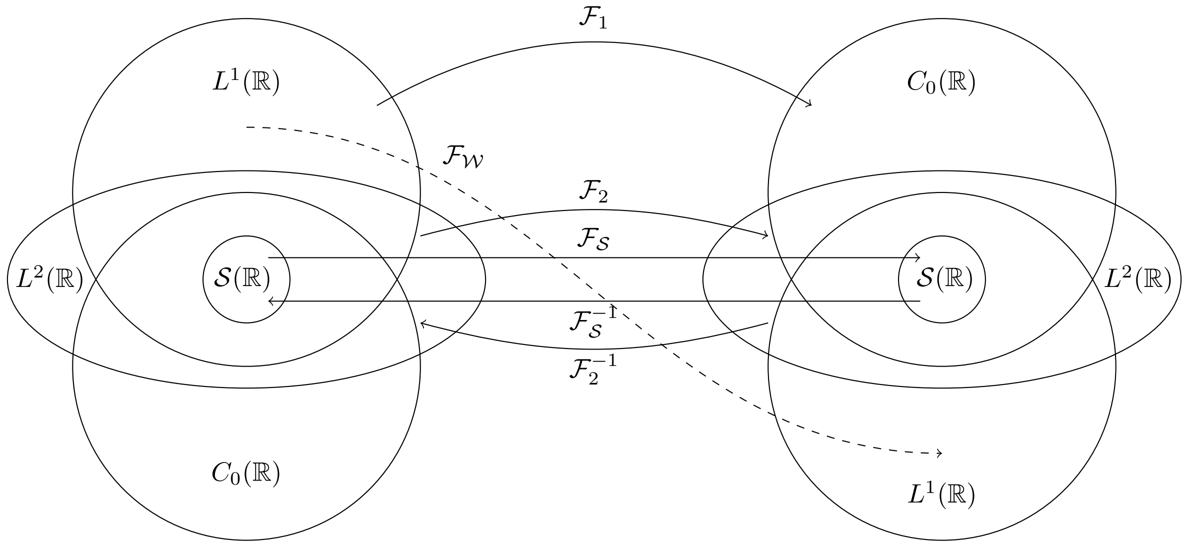
**Théorème 33** *Le problème*

$$(c)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R},\ u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

*a pour solution*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t}) u_0(y) \mathrm{d}y$$

**Illustrations**




$\mathcal{F}_1$ : continue et injective

$\mathcal{F}_2$ : isomorphisme isométrique

$\mathcal{F}_{\mathcal{W}}$ : bijective mais pas continue en norme $||.||_1$

$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ : bijective et bicontinue

## Questions

---

**Exercice :** Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution suivante :

$$f * f = f \qquad (\dagger)$$

---

*Solution :* Bien évidemment, étant dans le chapitre "Transformation de Fourier", on a une idée de la solution ... Mais il faut surtout se rappeler de pourquoi il est malin de passer par la transformée de Fourier : pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$$

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier, l'équation $(\dagger)$ devient

$$\widehat{f}.\widehat{f} = \widehat{f}$$

qui se réécrit

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi)(\widehat{f}(\xi) - 1) = 0$$

Par suite, on en déduit que $\widehat{f} = 0$ ou $\widehat{f} = 1$. Comme $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, on obtient finalement que $\widehat{f} = 0$. Par injectivité de la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, on a donc $f = 0$ est l'unique solution de l'équation $f * f = f$.

---

**Exercice :** On note $\mathcal{F}_1(f)$, la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$, et on note $\mathcal{F}_2(g)$ la transformée de Fourier-Plancherel de $g \in L^2(\mathbb{R})$.
1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Laquelle des deux formules suivantes est légitime ?

$$\mathcal{F}_1(f * g) = \mathcal{F}_1(f)\mathcal{F}_2(g) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_2(f * g) = \mathcal{F}_1(f)\mathcal{F}_2(g)$$

2) Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Laquelle des deux formules est légitime ?

$$\mathcal{F}_2(f) * \mathcal{F}_2(g) = \mathcal{F}_2(fg) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_2(f) * \mathcal{F}_2(g) = \mathcal{F}_1(fg)$$

---

*Solution :* 1) On a $L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p < +\infty$. Ainsi, la seule formule qui peut avoir un sens est la deuxième.

2) Comme $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $fg \in L^1(\mathbb{R})$. Par conséquent, la seule formule qui peut avoir un sens est la deuxième.

---

**Exercice :** Soit $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$. Calculer la transformée de Fourier de $f$, et en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

---

*Solution :* $\forall \xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\xi)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{(-\alpha - i\xi)x}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{\alpha - i\xi}e^{(\alpha - i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-\alpha - i\xi}e^{(-\alpha - i\xi)x}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha - i\xi} + \frac{1}{\alpha + i\xi} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}
\end{aligned}$$

En prenant, $\alpha = 1$, on a

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$$

Cette fonction est dans $L^1(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier, donnée par la formule d'inversion, est $f(-x)$. Par suite, la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $\xi \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$.