Noyaux de caractères et sous-groupes distingués

Mohamed NASSIRI

Références :

L'algèbre discrète de la transformée de Fourier : Niveau M1, Gabriel Peyré - p.231-232

Recasage :

●●●●● 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.
●●●●○ 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
●●●●○ 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Résumé :

Un développement très intéressant qui donne une caractérisation des sous-groupes distingués à partir des "noyaux de caractères". Ainsi, on peut trouver les sous-groupes distingués d'un groupe (mais également les relations d'inclusion entre ces sous-groupes) directement sur la table des caractères.

Prérequis :

Théorie des groupes - Représentations linéaires de groupes et caractères

---

Théorème : Soient G un groupe fini, et $\widehat{G} = \{\rho_1, ..., \rho_r\}$ son dual, formé de représentants des représentations irréductibles non isomorphes, de caractères χ_i pour $i = 1, ..., p$.
Les sous-groupes dinstingués d'un groupe fini G sont exactement du type

$$\bigcap_{i \in I} \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\} \text{ où } I \subset \{1, ..., r\}$$

Démonstration.

Lemme :
Soit G un groupe fini, et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représention, de caractère χ, sur un espace V de dimension d. Alors $K_\chi := \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}$ est un sous-groupe distingué de G. On le nomme "noyau de la représentation".

Démonstraton du lemme. On va montrer que $K_\chi = \mathrm{Ker}\rho := \{g \in G \mid \rho(g) = Id\}$ en procédant par double inclusion.

- $\underline{K_\chi \subseteq \mathrm{Ker}\rho}$: Soient $g \in G$ un élément d'ordre k, $\omega_1, ..., \omega_d$ les valeurs propres de $\rho(g)$ (et qui sont des racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité). On a

$$|\chi(g)| \leq |\omega_1| + ...|\omega_d| = d = \chi(1)$$

Donc si $g \in K_\chi$, alors $|\chi(g)| = d$, et on a donc égalité dans l'inégalité triangulaire précédente. Ceci signifie que les ω_i sont positivement liés dans $\mathbb{R}$, mais comme ils sont de module 1, ils sont tous égaux. Si $|\chi(g)| = d$, on a nécessairement $\omega_i = 1$, donc $\rho(g) = Id$. Donc $g \in \mathrm{Ker}\rho$.

- $K_\chi \supseteq \mathrm{Ker}\rho$: Soit $g \in \mathrm{Ker}\rho$, alors $\rho(g) = Id$, ce qui implique $|\chi(g)| = \mathrm{Tr}(Id) = d$ et donc $g \in K_\chi$.

Conclusion : $K_\chi = \mathrm{Ker}\rho$

□

• Soit $N \lhd G$. On note ρ_U la représentation régulière de G/N. Donc U est un espace vectoriel de dimension égale à $|G/N| = |G|/|N|$, de base $\{e_g\}_{g \in G/N}$, et l'on a $\rho_U(h)(e_g) = e_{hg}$.
La représentation régulière est fidèle, donc ρ_U est injective.
On étend cette représentation en une représentation $\tilde{\rho}_U : G \to GL(U)$. Pour cela, il suffit de poser

$$\forall g \in G,\ \tilde{\rho}_U := \rho_U \circ \pi(g)$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\tilde{\rho}_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & GL(U) \\ & G/N \arrow[ur, "\rho_U"'] & \end{tikzcd}$$

Notons χ le caractère de $\tilde{\rho}_U$. On a alors l'égalité $\mathrm{Ker}\tilde{\rho}_U = \mathrm{Ker}(\rho_U \circ \pi) = N$, d'où $N = K_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}$
Il ne reste plus qu'à décomposer la représentation $\tilde{\rho}_U$ en fonction de représentations irréductibles. On obtient donc $\chi = a_1\chi_1 + ... + a_r\chi_r$. Ainsi,

$$\forall g \in G,\ |\chi(g)| = \left|\sum_{i=1}^{r} a_i\chi_i(g)\right| \leq \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(g)| \leq \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(1)| = \chi(e)$$

On a donc l'égalité $\chi(g) = \chi(e)$ (c'est-à-dire $g \in K_\chi$) si et seulement si on a une égalité dans l'inégalité triangulaire précédente. D'où $\chi(g) = \chi(e)$ si et seulement si $\forall i,\ a_i\chi_i(g) = a_i\chi_i(e)$. Ceci est finalement équivalent à

$$\forall i, \quad a_i > 0 \Rightarrow g \in K_{\chi_i}$$

On a donc bien le résultat voulu avec $I := \{i \mid a_i > 0\}$

• Pour la réciproque, on sait que $K_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) = \chi(e)\}$ est un sous-groupe distingué (et comme l'intersection de sous-groupes distingués est distinquée, on peut conclure. □

Corollaire :
G est simple si et seulement si pour tout $i \neq 1$, pour tout $g \in G \backslash \{e\},\ \chi_i(g) = \chi_i(e)$.

Démonstraton du lemme.
$\Rightarrow$:
Supposons qu'il existe $g \in G$, avec $g \neq e$ tel que $\chi_i(g) = \chi_i(e)$, alors $K_{\chi_i} \subset G$ est un sous-groupe distingué non trivial de G, donc G n'est pas simple.

$\Leftarrow$:
Réciproquement, si G n'est pas simple, alors il existe $g \neq e$ dans un certain sous-groupe distingué $N \lhd G$ non trivial. Alors d'après le théorèmé précédent, $N = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$, donc $g \in K_{\chi_i}$ pour $i \in I \subset \{2, ..., r\}$. Ceci signifie bien que $\chi_i(g) = \chi_i(e)$.

□

Remarques :

- Comme on l'a dit en préambule, une des principales raisons d'avoir parler de ce théorème et de son corollaire est la suivante : on peut trouver très facilement les sous-groupes distingués d'un groupe à partir de sa table de caractères, mais également les relations d'inclusion entre ces sous-groupes... Par exemple, avec la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$:

$\mathfrak{S}_4$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	1	6	3	8	6
	e	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	$\boxed{1}$	-1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	-1
χ_3	$\boxed{2}$	0	$\boxed{2}$	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

On retrouve donc que le sous-groupe $K = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ est distingué dans $\mathfrak{S}_4$ car on a

$$K = K_{\chi_3} = \mathrm{Ker}\rho_3$$

mais également que le sous-groupe $\mathfrak{A}_4$ est distingué dans $\mathfrak{S}_4$ car on a

$$\mathfrak{A}_4 = K_{\chi_2} = \mathrm{Ker}\rho_2$$

De plus, on remarque que $\mathrm{Ker}\rho_3 \subset \mathrm{Ker}\rho_2$.