Déterminant. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Le déterminant est une caractérisation simple de la liberté algébrique d'une famille de vecteurs. En plus d'être l'unique forme alternée sur $\mathbb{R}^n$, on a une formule explicite pour le déterminant avec une somme portant sur $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Même si cette formule nous permet de démontrer que $\det(AB) = \det(BA)$ ou encore $\det({}^tA) = \det(A)$, elle n'est pas "top" dans la pratique. En effet, pour calculer un déterminant de taille 5×5, on aura $|\mathcal{S}_5| = 120$ termes dans la somme ... Heureusement, on a une autre formule qui fait intervenir les *cofacteurs* de la matrices.

Tout en restant dans le calcul explicite de déterminant, on peut citer deux déterminants remarquables : le détermimant de Vandermonde et le déterminant circulant. Ce dernier joue un rôle important dans le développement "Suite de polygones".

Les applications sont variées : résolution des systèmes de Cramer, calcul de volumes dans $\mathbb{R}^n$, calcul de distances dans $\mathbb{R}^n$ avec les matrices de Gram, changement de variables en calcul intégral, etc.

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[GOUal] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[GOUag] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠

Développements

Suite de polygones
Différentielle du déterminant

Dans toute la leçon, K est un corps commutatif et on note $A = (a_{ij}) = (c_1, ..., c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Une définition par récurrence [GRI] p.103-104

Définition 1 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. On définit, par récurrence, une application* $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ *de la manière suivante :*
- *Si $n = 1$, (i.e.) $A = (a)$, on pose* $\det(A) = a$;
- *Si $n > 1$, notons A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne, on pose alors (puisque $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$) :*

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + ... + (-1)^{k+1}a_{1k}\det(A_{1k}) + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})$$

Le scalaire $\det(A)$ *est dit <u>déterminant de A</u> et on note*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Remarque 3 *Pour le développement des déterminants d'ordre 3, on a la règle de Sarrus.*

1.2 Une formule explicite [GRI] p.113 → p.115

Proposition 4 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n}$$

Exemple 5 *Pour $n = 3$, on a $\mathcal{S}_3 = \{\sigma_1 = Id, \sigma_2 = (1\ 2\ 3), \sigma_3 = (1\ 3\ 2), \tau_1 = (2\ 3), \tau_2 = (1\ 3), \tau_3 = (1\ 2)\}$ avec $\epsilon(\sigma_i) = 1$ et $\epsilon(\tau_i) = -1$ $(i = 1, 2, 3)$.*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &+ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Théorème 6 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors*

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

1.3 Forme linéaire alternée [GRI] p.105 → p.115

Théorème 7 *1) Le déterminant est une application liniéaire par rapport à colonne.*
2) Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

Corollaire 8 *1) Si l'on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.*
2) Le déterminant ne change pas si à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Proposition 9 *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *et* $A = (c_1, ..., c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$*. Alors*

$$\det(c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(n)})\epsilon(\sigma)\det(c_1, ..., c_n)$$

Exemple 10

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \epsilon((1\ 4\ 2)(3\ 5)) = -1$$

Théorème 11 *Soit* $A = (c_1, ..., c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$*. Alors les vecteurs* $c_1, ..., c_n$ *forment une base de* K^n *si et seulement si* $\det(A) \neq 0$

Corollaire 12 *Règle de "dualité" :*
On a montré plus haut que $\det({}^tA) = \det(A)$*, donc toutes les propriétés du déterminant relatives aux colonnes peuvent être affirmées pour les lignes.*

2 Calcul des déterminants

2.1 Cofacteurs et mineurs

Définition 13 *On appelle cofacteur de l'élément* a_{ij} *le scalaire*

$$\text{cof}(a_{ij}) := (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

où A_{ij} *la matrice obtenue en supprimant la* i^{eme} *ligne et la* j^{eme} *colonne.* **[GRI] p.115**

Exemple 14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \text{cof}(1) = + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

[GRI] p.115

Théorème 15 *Développement du déterminant selon la* j^{ieme} *ligne :*

$$\det(A) = a_{j1}\text{cof}(a_{j1}) + ... + a_{jn}\text{cof}(a_{jn})$$

Développement du déterminant selon la j^{ieme} *colonne :*

$$\det(A) = a_{1j}\text{cof}(a_{1j}) + ... + a_{nj}\text{cof}(a_{nj})$$

[GRI] p.116

Définition 16 *On appelle mineur d'ordre r de* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *le déterminant d'une matrice extraite de A obtenue en choisissant r lignes et r colonnes.* **[GRI] p.123**

Exemple 17 *Par exemple, en choisissant la ligne 2 et 3 et la colonne 2 et 4 de la matrice, on obtient le mineur* δ *comme suit :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 5 & \boxed{4} \\ 2 & \boxed{1} & 3 & \boxed{6} \end{pmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 14$$

[GRI] p.123

Théorème 18 *Soit* $A = (c_1, ..., c_n) \in \mathcal{M}_n(K)$*. Alors*

$$\text{rg}(A) = r \leq n \Leftrightarrow \begin{cases} - & \text{il existe un mineur d'ordre } r \text{ non nul} \\ - & \text{tous les mineurs d'ordre } s > r \text{ sont nuls} \end{cases}$$

[GRI] p.127

Définition 19 $\forall k \in \{1, ..., n\}$*, on définit les mineurs principaux d'ordre k comme étant les déterminants* $\det(M_k) = \det(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k})$*.* **[GOUag] p.136**

Théorème 20 *Critère de Sylvester :*
Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique. Alors*
M est définie positive si et seulement si $\forall k \in \{1, ..., n\}$*,* $detM_k > 0$*.* **[GOUag] p.243-244**

Application 21 $A = (\frac{1}{1+|i-j|})_{1\leq i,j\leq n}$ *est symétrique définie positive.* **[GOUag] p.245**

2.2 Produits et inverse de matrices [GRI] p.119 → p.122

Théorème 22 *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$*. Alors*

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Corollaire 23 $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *est inversible si et seulement si* $\det \neq 0$ *et l'on a alors*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Corollaire 24 *Si A et* A' *sont deux matrices semblables, alors* $\det A = \det A'$

Définition 25 *On appelle polynôme caractérique de A, le polynôme* $\chi_M(X) = \det(XI - M)$*.*

Remarque 26 *Le déterminant étant défini pour les matrices à coefficients dans K et $K[X]$ étant intègre, on peut définir* $\det(A - XI_n)$ *au passant au corps des fractions de $K[X]$.*

Proposition 27 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors*

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

Proposition 28 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elles sont semblables sur $\mathbb{C}$.*

Définition 29 *On appelle* <u>*comatrice de A*</u> *la matrice obtenue de A en remplaçant chaque élément par son cofacteur et elle est noté $com(A)$*

Théorème 30 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a alors*

$$A^t com(A) =^t com(A)A = (\det A)I_n$$

En particulier, si A est inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t com(A)$$

Exemple 31 *Si* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, *avec* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, *on retrouve :*

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

2.3 Exemples classiques [GOUag] p.137 & p.178-179

Proposition 32 <u>*Déterminant de Vandermonde :*</u>
Soit $(x_i)_{i=1\ldots n} \in \mathbb{K}^n$. Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Application 33 *Soient $a_1, \ldots a_n$ n éléments distincts de $\mathbb{R}$, et soient $b_1, \ldots b_n$ n éléments de $\mathbb{R}$. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que*

$$P(a_i) = b_i, \quad i = 1 \ldots n$$

Ce polynôme s'appelle le <u>*polynôme interpolateur de Lagrange*</u> *relatif à la donnée $a_1, \ldots a_n$ et $b_1, \ldots b_n$. De plus, il a pour expression*

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{\substack{j=i \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Proposition 34 <u>*Déterminant circulant :*</u>
Soit $(a_i)_{i=1\ldots n} \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \ldots & x_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

où $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ et ω une racine primitive n-ième de l'unité.

Application 35 ♠ <u>*Suite de polygones*</u> ♠
Soit $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ une suite d'affixes du plan complexe.
En notant, $Z_k = (z_{k,1}, \ldots, z_{k,n})$, on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \quad \text{et}$$

$$Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \ldots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2}\right)$$

Alors la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des affixes $z_1, \ldots, z_n$.

2.4 Matrices par blocs [GRI] p.134 → p.138

Proposition 36

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = \det A \det C$$

avec $A \in \mathcal{M}_k(K)$ et $A \in \mathcal{M}_{n-k}(K)$.

Application 37 *Soient M la matrice d'un endormorphisme u d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et F un sous-espace stable de u. Alors $\chi_{u_{|F}} = \chi_u$.*

3 Régularité et topologie

3.1 Un peu de topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition 38 *L'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 39 *L'ensemble des matrices* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Proposition 40 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1\}$ *est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 41 *$GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes par arcs.*

Proposition 42 *Soit $1 \leq r \leq n$. L'ensemble* $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M \leq r\}$ *est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Corollaire 43 $\overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M = r\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M \leq r\}$

3.2 Plus de régularité [ROU]- p.74-75

Proposition 44 ♠ *Différentielle du déterminant* ♠
L'application déterminant est de classe C^1 (même C^∞) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}(\,{}^t\mathrm{com}(X)H)$$

4 Applications

4.1 Système de Cramer [GRI] p.142-143

Définition 45 *On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice est carrée et inversible.*

Théorème 46 *Théorème de Cramer :*
Un système de Cramer :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(avec $A = (a_{ij}) = (c_1, ..., c_n)$ et $\det A \neq 0$) admet toujours une et une seule solution $\forall b = (b_1, ..., b_n)$ donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(c_1, ..., c_{i-1}, b, c_{i+1}, ..., c_n)}{\det A}$$

4.2 Volumes [GRI] p.128 → p.131

Théorème 47 *Soit $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire du parallélogramme engendré par u et v. Alors*

$$\mathcal{A}(u, v) = |\det(u, v)|$$

Théorème 48 *Soit $\mathrm{Vol}(v_1, ..., v_n)$ le volume du parallélogramme engendré par $v_1, ..., v_n$. Alors*

$$\mathrm{Vol}(v_1, ..., v_n) = |\det(v_1, ..., v_n)|$$

Proposition 49 *Soient M la matrice d'un endormorphisme u d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et $\{v_1, ..., v_n\}$ un système de n vecteurs. Alors*

$$\det f := \det M = \frac{\det(f(v_1), ..., f(v_n))}{\det(v_1, ..., v_n)}$$

4.3 Matrices de Gram [GRI] p.258 & p.266

Définition 50 *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille ordonnée de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram associé la famille $(v_1, ..., v_p)$, la matrice*

$$\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_p) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \dots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix}$$

On note $G(v_1, ..., v_p) = \det(\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_p))$.

Théorème 51 *Soient $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre de E, $F = \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_p\}$ et $x \in E$. Alors,*

$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, ..., v_p)}{G(v_1, ..., v_p)}$$

4.4 Changement de variables en analyse [GOUal] p.334-335

Théorème 52 **(Admis)** *Thèorème de changement de variables :*
Soient U un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$, et φ un C^1-difféormorphisme de $\mathring{U}$ sur $\varphi(\mathring{U})$, tel que φ et son jacobien $J(\varphi)$ se prolonge continûment sur U. Alors $V = \varphi(U)$ un compact mesurable et pour toute fonction continue $f : V \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_V f(v)\mathrm{d}v = \int_U f(\varphi(u))|J(\varphi)(u)|\mathrm{d}u$$

Corollaire 53 *Passage en coordonnées polaires :*
Dans $\mathbb{R}^2$, on désigne par $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ les coordoonées polaires et $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ les coordonées cartésiennes.
Soit D (resp. Δ) un compact de $\mathbb{R}^2$ représenté en coordonées cartésiennes (resp. coordoonées polaires). Alors,

$$\int_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}r\theta$$

Application 54 *Calcul de l'intégrale de Gauss :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Questions

Exercice : Donner le lien entre $P(X)=\sum_{i=0}^{n-1} a_iX^i \in \mathbb{R}[X]$ et $\chi_M(X)=\det(XI-M)$ avec

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\chi_M(X)=\det(XI-M)=\begin{vmatrix} X & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

en faisant $L_1 \leftarrow L_1+XL_2+X^2L_3+...+X^{n-1}L_n$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Developpement par rapport a la 1^{ere} ligne

$$=(-1)^{n+1}P(X)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{n-1}}=P(X)$$

Exercice : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A\in\{\pm 1\}$

Solution : On sait que pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on a

$$A\,{}^tcom(A)={}^t\,com(A)A=(\det A)I_n$$

et par définition de la comatrice, si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors ${}^tcom(A)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

<u>$\Rightarrow$:</u> Supposons A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Alors d'après le rappel, on a

$$\underbrace{A^{-1}}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}=\frac{1}{\det A}\underbrace{{}^tcom(A)}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

Pour que l'égalité soit donc vraie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, nécessairement $\det A \in \{\pm 1\}$.

<u>$\Leftarrow$:</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\det A \in \{\pm 1\}$. Donc, en particulier $\det A \neq 0$ et A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Alors, on a l'égalité (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ a priori) :

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det A}_{=\pm 1}} \underbrace{{}^t com(A)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

Par suite, $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ donc A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice : Montrer que, pour $1 \leq r \leq n$, $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M \leq r\}$ est un fermé.
En déduire que $\overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M = r\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M \leq r\}$

Solution : Soit $1 \leq r \leq n$.
- Montrons que $R_r^- := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M \leq r\}$ est un fermé.
Une matrice $M \in R_r^-$ vérifie que toutes ses matrices extraites de taille $s > r$ ont un déterminant nul. Soient $M_1, ..., M_q$ sont les susdites matrices extraites de M. Alors,

$$R_r^- \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{q} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det M_i = 0\} = \bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\{0\})$$

où les $f_i : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto \det M_i$ sont continues. Donc R_r^- est une intersection de fermés (comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par les applications continues f_i).

Soit $R_r := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M = r\}$. Comme $R_r \subset R_r^-$ et que R_r^- est fermé, on a

$$\overline{R_r} \subset \overline{R_r^-} = R_r^-$$

- Montrons l'inclusion réciproque $R_r^- \subset \overline{R_r}$:
Soit $A \in R_r^-$. Alors, en notant $\mathrm{rg} A = r' \leq r$, il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

En posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = P \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} I_{r-r'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

On a donc que (A_k) est une suite de R_r qui tend vers A et donc $A \in \overline{R_r}$.

<u>Conclusion :</u> $\overline{R_r} = \overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M = r\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M \leq r\} = R_r^-$

Exercice : Montrer l'équivalence suivante : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elles sont semblables sur $\mathbb{C}$.

Solution : <u>$\Rightarrow$:</u> Evident.
<u>$\Leftarrow$:</u> Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$.
Décomposons $P = C + iD$ avec $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'où

$$A(C + iD) = (C + iD)B$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = CB & (L_1) \\ AD = DB & (L_2) \end{cases}$$

On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A(C+\lambda D) = (C+\lambda D)B$ (on obtient cette égalité en faisant $(L_1)+\lambda(L_2)$) et $C+\lambda D$ inversible.
Soit $\chi(X) = \det(C+XD) \in \mathbb{C}[X]$. On sait que $\chi(i) \neq 0$, donc la fonction polynomiale P n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$ (et $a\ fortiori$ sur $\mathbb{R}$) et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi(\lambda) \neq 0$ (*i.e.*) $C+\lambda D$ est inversible et vérifie $A(C+\lambda D) = (C+\lambda D)B$. Donc A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice : Soit $(a_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & x_1 \end{pmatrix}$$

.

Solution : Considérons la matrice

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On a donc $A = \sum_{i=1}^{n} a_i J^{i-1}$. Par conséquent, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $\deg Q < n$, on a $Q(J) \neq 0$. Donc le polynôme minimal de J vérifie $\deg \Pi_J \geq n$, or $J^n - I = 0$, donc $\Pi_J = X^n - 1$. Et comme $\Pi_J | \chi_J$ avec $\deg \chi_J = n$, on a donc $\chi_J(X) = (-1)^n X^n - 1 = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
J est donc diagonalisable, et il existe ainsi $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que

$$QAQ^{-1} = QP(J)Q^{-1} = P(QJQ^{-1}) = \begin{pmatrix} P(1) & & & \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Donc $\det A = P(1)P(\omega)...P(\omega^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$