

Exponentielle de matrices. Applications.

Mohamed NASSIRI

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'idée sera ici de généraliser l'application exponentielle $\exp : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^*$ en une application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par la série convergente $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$. L'analogie avec l'exponentielle sur \mathbb{K} est frappante :

$$\begin{array}{ll} \exp : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} & \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} & M \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k \end{array}$$

On va s'intéresser à plusieurs propriétés de notre nouvelle application : injectivité, surjectivité, régularité, homéomorphisme, etc.

De plus, à partir de la décomposition de Duford (additive) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pourra obtenir, grâce à l'exponentielle de matrices, une décomposition de Duford (multiplicative) de $\exp(M)$:

$$M = D + N \xrightarrow{\exp} \exp(M) = \exp(D)\exp(N)$$

Une des applications importantes de l'exponentielle de matrices est la résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, où encore une fois, l'analogie est frappante avec les systèmes en dimension 1

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{cases} & \text{avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), x(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \xrightarrow{\text{solutions}} \quad x(t) = e^{tA}x_0 \\ \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} & \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } x(t) \in \mathbb{R} \quad \xrightarrow{\text{solutions}} \quad x(t) = x_0 e^{at} \end{array}$$

Références

- [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[ML3a] Mathématiques L3 Algèbre, Jean-Pierre Marco
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

M est diagonalisable $\Leftrightarrow e^M$ est diagonalisable
Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

0 Suites et séries de matrices

Proposition 1 $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel normé pour la norme définie par : pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |m_{ij}|^2} = \text{Tr}(M^*M)$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace métrique pour la distance définie par : pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$d(M, N) := \|M - N\|$$

Proposition 2 Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors :

$$\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$$

Définition 3 • On dit qu'une suite de matrices (M_n) converge vers la matrice M si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \Rightarrow (d(M_n, M) \leq \epsilon)$$

• On dit qu'une série de matrices $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ converge si la suite des sommes partielles $S_k = \sum_{n=0}^k M_n$ converge; dans ce cas, la limite de S_k est appelé somme de la série.

• On dit qu'une série de matrices est absolument convergente si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \|M_n\|$ converge.

1 Définition et calculs

1.1 Définitions et premières propriétés [ML3al] p.349

Définition 4 L'application exponentielle matricielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par la série convergente $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Proposition 5 L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

Proposition 6 Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $MN = NM$, alors $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$

Corollaire 7 Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(M) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$.

1.2 Calculs [ML3al] p.350

- Proposition 8** 1) Pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\exp(PMP^{-1}) = P\exp(M)P^{-1}$.
 2) Si $\Delta = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, alors $\exp(\Delta) = \text{diag}(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$
 3) Si Δ est triangulaire supérieure avec pour diagonale $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, alors $\exp(\Delta)$ est triangulaire supérieure avec pour diagonale $\text{diag}(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$.
 4) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(\exp(M)) = \exp(\text{Tr}(M))$.
 5) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a ${}^t(\exp(M)) = \exp({}^t M)$.
 6) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\overline{\exp(M)} = \exp(\overline{M})$.
 7) Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $\exp(N)$ est unipotente.

Proposition 9 Décompositions de Duford :
 Si $M = D + N$ est la décomposition de Duford additive dans \mathbb{C} de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors
 (i) $\exp(M) = \exp(D)\exp(N)$ est la décomposition de Duford multiplicative de $\exp(M)$,
 (ii) $\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$ est la décomposition de Duford additive de $\exp(M)$.

Proposition 10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 (i) M est diagonalisable $\Leftrightarrow e^M$ est diagonalisable.
 (ii) $e^M = I_n \Leftrightarrow \text{sp}(M) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

2 Propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Injectivité [H2G2t1] p.210

Proposition 11 L'application exponentielle matricielle n'est pas injective.

Exemple 12 • Sur \mathbb{C} , $\exp(2ik\pi) = 1$ pour tout entier k .

• Sur \mathbb{R} ,

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

2.2 Surjectivité [ML3al] p.358-359

Proposition 13 L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Plus précisément, pour tout $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

Corollaire 14 Le sous-espace $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Proposition 15 Pour $n > 1$, l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Plus précisément, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$. De plus, pour tout $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M^2 = \exp(P(M))$.

2.3 Régularité [ML3al] p.350 \rightarrow 353

Proposition 16 L'exponentielle matricielle est différentiable en 0_n et $D\exp(0_n) = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Théorème 17 (admis)

L'exponentielle matricielle est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$D\exp(M) = \exp(M)F(\text{ad}(M))$$

où

$$\begin{aligned} \text{ad}(M) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ N &\mapsto MN - NM \end{aligned}$$

et, pour tout application \mathbb{R} -linéaire $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(\Phi) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $F(\Phi) = \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \Phi^j$.

2.4 Homéomorphismes [H2G2t1] p.202 \rightarrow 210

Théorème 18 Décomposition polaire
 On a les homéomorphismes suivants :

$$\text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{GL}_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS$$

$$\text{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} \text{GL}_n(\mathbb{C}), (U, H) \mapsto UH$$

Théorème 19 ♠ Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ♠

• L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

• L'application $\exp : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}$ est un homéomorphisme.

Corollaire 20 On en déduit les isomorphismes suivants :

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) \approx \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{GL}_n(\mathbb{C}) \approx \text{U}_n \times \mathbb{R}^{n^2}$$

3 Applications aux équations différentielles [GRI] p.376-377

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors la solution qui pour $t = 0$ prend la valeur $x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est :

$$x(t) = e^{tA}x_0 \quad \forall t > 0$$

Proposition 21 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$$

Proposition 22 Soit $x' = Ax$ un système différentiel linéaire à coefficients constants avec $A \in$

Corollaire 23 Soit $x' = Ax$ un système différentiel linéaire à coefficients constants avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si une solution passe à un instant donné par un sous-espace propre E_λ , elle reste dans E_λ .

Questions

Exercice : 1) Soient $\mathcal{U}(n) = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid Q^*Q = I_n\}$ et $u(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* + A = 0_n\}$.
Montrer que $\exp : u(n) \rightarrow \mathcal{U}(n)$.

2) Soient $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det Q = 1\}$ et $o_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA + A = 0_n\}$.
Montrer que $\exp : o_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Solution : 1) Soit $A \in u(n)$. On a donc

$$\exp(A^* + A) = \exp(0_n) = I_n \quad (\dagger)$$

Or A et A^* commutent donc $\exp(A^* + A) = \exp(A^*)\exp(A)$ et, par continuité de l'application \exp , $\exp(A^*) = \exp(A)^*$. Ainsi, (\dagger) devient

$$\exp(A)^*\exp(A) = I_n$$

Par conséquent, $\exp(A) \in \mathcal{U}(n)$.

2) L'argument est le même pour montrer que si $A \in o_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En effet, soit $A \in o_n(\mathbb{R})$. On a donc

$$\exp({}^tA + A) = \exp(0_n) = I_n \quad (\dagger\dagger)$$

Or A et tA commutent donc $\exp({}^tA + A) = \exp({}^tA)\exp(A)$ et, par continuité de l'application \exp , $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$. Ainsi, $(\dagger\dagger)$ devient

$${}^t\exp(A)\exp(A) = I_n$$

Par conséquent, $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $\exp(A) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$: Soit $A \in o_n(\mathbb{R})$, on sait que

$$\det(\exp A) = \exp(\text{Tr} A)$$

Il suffit donc de montrer que $\text{Tr} A = 0$. Or comme $A \in o_n(\mathbb{R})$,

$$0 = \text{Tr}(0_n) = \text{Tr}({}^tA + A) = 2\text{Tr} A \Rightarrow \text{Tr} A = 0$$

Conclusion : $\exp(A) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dire si les matrices suivantes appartiennent à l'image de \exp :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Or $\det A < 0$, donc $A \notin \text{Im}(\exp)$.

Pour la matrice B , l'argument ne marche pas : $\det B > 0$, mais cela ne veut pas dire que $B \in \text{Im}(\exp)$...

On a un résultat plus précis sur l'image de l'exponentielle : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

On va proposer deux méthodes.

Méthode 1 :

Ainsi, si $B \in \text{Im}(\exp)$, alors $B = M^2$, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cherchons les valeurs propres de M .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M associée au vecteur propre $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Alors

$$My = \lambda y$$

De plus, comme $B = M^2$, il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, telle que

$$M^2x = -x \quad (\dagger)$$

car -1 est (la seule) valeur propre de $B = M^2$. Par conséquent,

$$M^2y = MM^2y = M\lambda y = \lambda My = \lambda^2 y$$

Nécessairement, par la relation (\dagger) , on en déduit que $\lambda^2 = -1$ et donc $\lambda = \pm i$

Par conséquent, M est diagonalisable sur \mathbb{C} , donc M^2 aussi et, par suite, M^2 serait équivalente à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Absurde!

Méthode 2 :

Si $B \in \text{Im}(\exp)$, alors $B = M^2$, avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

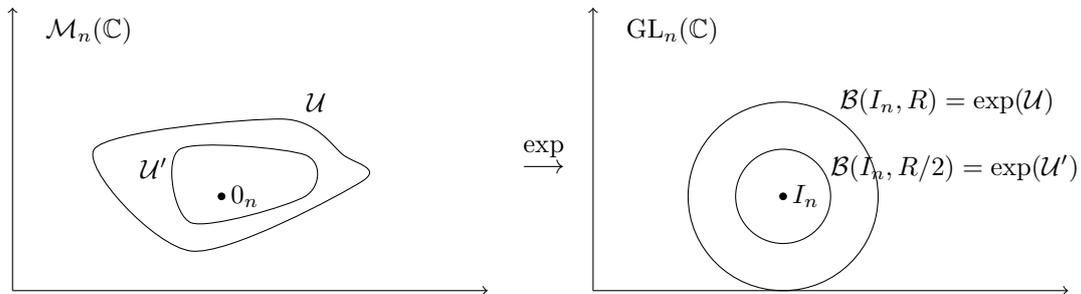
En particulier, cela implique $b(a+d) = 1$ donc que $a+d \neq 0$ et comme $c(a+d) = 0$, ceci implique nécessairement que $c = 0$.

Ainsi, sur la diagonale, on obtient $a^2 = -1$ et $d^2 = -1 \dots$ Absurde, puisque $a, d \in \mathbb{R}$!

Exercice : Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ n'admet pas de "sous-groupes arbitrairement petits" (*i.e.*) pour une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en notant $\mathcal{B}(I_n, R) := \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \|M - I_n\| < R\}$ la boule ouverte de centre I_n et de rayon $R > 0$, montrer que le seul sous-groupe contenu dans $\mathcal{B}(I_n, R)$ est $\{I_n\}$.

Solution : Soit donc $\mathcal{B}(I_n, R)$ une boule ouverte de centre I_n et de rayon $R > 0$ et \mathcal{U} un ouvert de 0_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que \exp soit un difféomorphisme de \mathcal{U} sur $\mathcal{B}(I_n, R)$.

On considère \mathcal{U}' tel que $\mathcal{B}(I_n, R/2) = \exp(\mathcal{U}')$ ($\mathcal{B}(I_n, R/2)$ est encore un ouvert).



Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\mathcal{B}(I_n, R/2)$, et soit $M \in G \setminus \{I_n\}$. On va montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p \notin \mathcal{B}(I_n, R/2)$ (et donc $M^p \notin G$).

Comme \exp est un difféomorphisme de \mathcal{U} sur $\mathcal{B}(I_n, R)$, c'est *a fortiori* un difféomorphisme de \mathcal{U}' sur $\mathcal{B}(I_n, R/2)$. Donc il existe un unique $N \in \mathcal{U}'$ telle que $\exp(N) = M$.

De plus, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $pN \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$. Par conséquent,

$$\underbrace{\exp(pN)}_{\in \mathcal{B}(I_n, R) \setminus \mathcal{B}(I_n, R/2)} = \exp(N)^p = M^p \Rightarrow M^p \notin \mathcal{B}(I_n, R/2) \Rightarrow M^p \notin G$$

Donc, pour $R > 0$ quelconque, la boule $\mathcal{B}(I_n, R)$ ne contient aucun sous-groupe non trivial (car pour dans un sous-groupe multiplicatif G , tout élément $M \in G$ vérifie $M^p \in G, \forall p \in \mathbb{N}$).